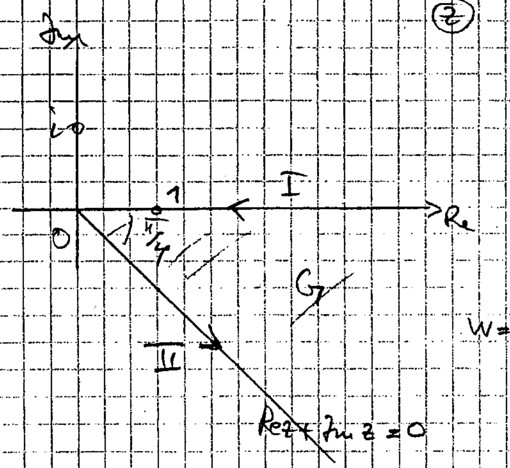
A1



$$w = f(z) = \frac{i}{z^2+1}$$

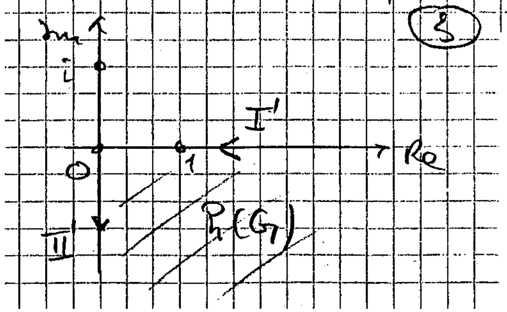
1) $\xi = z^2 = h(z)$ 2) $w = g(\xi) = \dfrac{i}{\xi + 1}$

$$z \xrightarrow{h} \xi \xrightarrow{g} w$$

$$f = g \circ h \qquad f(z) = g(z^2)$$

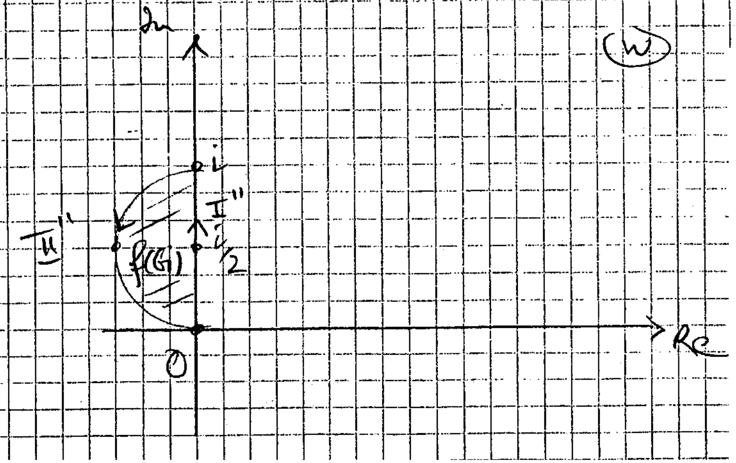
1) I': Bild von I : $z = x,\ x > 0 \longrightarrow \xi = x^2 > 0$

II': Bild von II : $z = r e^{i\frac{7\pi}{4}},\ r > 0 \longrightarrow \xi = r^2 e^{i\frac{7\pi}{2}} = r^2 e^{i\frac{3\pi}{2}}$



2) I'' (II'') : Bild von I' (II') unter g.

g ist eine Möbiustransformation.
Da I' durch $\infty, 0, -1$ geht, ist I'' die Gerade durch $0 = g(\infty)$ und $i = g(0)$. Wegen $g(1) = \frac{i}{2}$ ist I'' das Stück der imaginären Achse von 0 nach i (über $\frac{i}{2}$).
II' geht nicht durch -1. Somit ist II'' der Kreis durch $g(\infty) = 0$ und $g(0) = i$, der in i $\perp$ auf der imaginären Achse steht. II'' ist der Kreis um $\frac{i}{2}$ mit Radius $\frac{1}{2}$. Er ist orientiert von i nach 0 in $\operatorname{Re} w < 0$ wegen $g(-i) = \frac{i}{2} - \frac{1}{2}$



A2 VD HM III F2003

a) $$\frac{1}{(i+z)^2} = -\frac{1}{(1-iz)^2}$$

Mit $\left(\frac{1}{1-iz}\right)' = \frac{i}{(1-iz)^2}$ hat man also:

$$\frac{1}{(i+z)^2} = i\left(\frac{1}{1-iz}\right)' \overset{\text{geom. Reihe}}{=} i\left(\sum_{k=0}^{\infty} i^k z^k\right)' \quad (|z|<1)$$

$$= i\sum_{k=1}^{\infty} k\, i^k z^{k-1} = i\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\, i^{k+1} z^k$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} i^k (k+1) z^k$$

gültig für $|z|<1$ (geom. Reihe).

(Bemerkung: – Man kann auch mit der Binomischen Reihe

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} z^k, \quad |z|<1, \ \alpha\in\mathbb{R}, \text{ rechnen,}$$

– oder man multipliziert die (geom.) Reihe für $(i+z)^{-1}$ mit sich selbst mittels des Cauchy-Produktes.)

b) $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+i)^2}$ hat die isolierten Singularitäten 0 und $-i$.

Innerhalb $|z|=\frac{1}{2}$ liegt nur die wesentliche Singularität $z=0$. Nach dem Residuensatz gilt:

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0)$$

$\operatorname{Res}(f,0)$ ist in der Laurententwicklung von f um 0 in $0<|z|<1$ der Koeffizient bei z^{-1}:

$$f(z) = \frac{1}{(i+z)^2}e^{\frac{1}{z}} = -\Big(\underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} i^l (l+1) z^l}_{\text{nach a), } |z|<1}\Big)\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{-k}}_{e^{1/z} \text{ (für alle } z\neq 0 \text{ konvergent)}}\Big)$$

$k = l+1$

$$0<|z|<1 \Rightarrow \ldots - \frac{1}{z}\underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} i^l (l+1)\frac{1}{(l+1)!}}_{-\operatorname{Res}(f,0)} + \ldots$$

$$\operatorname{Res}(f,0) = -\sum_{l=0}^{\infty} i^l \frac{1}{l!} = -e^{i} = -\cos 1 - i\sin 1$$

also $2\pi i \operatorname{Res}(f,0) = -i\, 2\pi\cos 1 + 2\pi\sin 1$

$\rightarrow$

$$\operatorname{Re}\Big(\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz\Big) = 2\pi\sin 1, \quad \operatorname{Im}\Big(\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz\Big) = -2\pi\cos 1$$

A3 $xy'^2 - 2yy' = 8y$

a) Geraden als Lösung: $y = ax+b$ ergibt, eingesetzt:

$$xa^2 - 2(ax+b)a = x(-a^2) - 2ab = 8ax + 8b$$

$\rightarrow$ $-a^2 = 8a$ $\rightarrow$ $a = 0$ oder $a = -8$

$-2ab = 8b$ $\rightarrow$ $b = 0$

$y(x) = 0 \quad \forall x$ ist Lösung

$y(x) = -8x \quad \forall x$ ist Lösung

Es sei jetzt $y(x)$ keine Gerade ($y'(x) \neq \text{Const}$).

DGL $\rightarrow$ $y = x \dfrac{y'^2}{2(4+y')}$ (d'Alembert DGL)

Wir suchen die Lösungen zunächst in Parameterform

$x = \psi(t),\ y = \chi(t)$ mit $t = y'(x) \Leftrightarrow x = \psi(t)$

Mit $y = y(\psi(t)) = \chi(t)$ und der DGL erhält man (Vorlesung):

$$\dot\psi(t)\underbrace{\left(\frac{t^2}{2(4+t)} - t\right)}_{-\frac{t}{2}\frac{8+t}{4+t}} + \psi(t)\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2(4+t)}\right)}_{\frac{t}{2}\frac{8+t}{(4+t)^2}} = 0$$

$\rightarrow$ $\dot\psi(t) - \dfrac{1}{4+t}\psi(t) = 0$ (linear homogen 1. Ordnung für ψ.)

$\rightarrow$ $x = \psi(t) = c(4+t)$ c konst.

Die DGL liefert sofort:

$$y = \chi(t) = \psi(t)\frac{t^2}{2(4+t)} = \frac{c}{2}t^2$$

Alle Lösungen in Parameterform (außer den Geraden von oben):

$$x = \psi(t) = c(4+t)$$
$$y = \chi(t) = \frac{c}{2}t^2$$

c konst beliebig, $\neq 0$, $t \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ $t = \dfrac{x}{c} - 4$ $\rightarrow$ $y = \dfrac{c}{2}\left(\dfrac{x}{c} - 4\right)^2$ $\boxed{(*)}$

$c \neq 0$ beliebig, konst

explizite Form der Lösungen.

b) Lösungen mit $y(1) = 0$

1) $y(x) = 0 \quad \forall x$ oder

2) $(*)$ $\rightarrow$ $0 = \dfrac{c}{2}\left(\dfrac{1}{c} - 4\right)^2$ $\rightarrow$ $c = \dfrac{1}{4}$

also: $y = \dfrac{1}{8}(4x-4)^2 = 2(x-1)^2$

Sind die Lösungen, die die geforderte Anfangsbedingung

A4

a) Setze $\underline{y = vw}$, $y' = v'w + vw'$, $y'' = v''w + 2v'w' + vw''$

in $Ly = 0$ ein:

$$vw'' + \underbrace{\{2v' - 2(x+1)v\}}_{=:\,p(x)} w' + \underbrace{\{v'' - 2(x+1)v' + (x^2+2x)v\}}_{=:\,q(x)} w = 0$$

Die Forderung in der Aufgabenstellung verlangt

$$p(x) = 0 \iff v' - (x+1)v = 0$$

$$\longrightarrow \quad \underline{v(x) = c\,e^{\frac{x^2}{2}+x}}, \quad c \text{ konst (beliebig)}$$

Hiermit wird $q(x)$ berechnet:

$$v'' = v + (x+1)v' = v + (x+1)^2 v$$

$$\longrightarrow \quad q(x) = v + (x+1)^2 v - 2(x+1)^2 v + (x^2+2x)v = 0$$

Die transformierte DGL lautet somit

(1) $$c\,e^{\frac{x^2}{2}+x}\, w''(x) = 0$$

$\longrightarrow$ $w(x) = ax + b$, a, b konst (beliebig)

$\longrightarrow$ $\underline{\text{allgemeine Lösung von } Ly = 0}$

(2) $$\underline{y = (c_1 x + c_2)\,e^{\frac{x^2}{2}+x}}, \quad c_1, c_2 \text{ beliebig}$$

$\longrightarrow$ $\underline{y_1 = e^{\frac{x^2}{2}+x}, \; y_2 = x\,e^{\frac{x^2}{2}+x}}$ bilden Fundamentalsystem von Lösungen von $Ly = 0$.

b) In (2) sind c_1, c_2 aus $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ zu berechnen:

$$y(0) = 0 \longrightarrow \underline{0 = c_2} \longrightarrow y(x) = c_1 x\,e^{\frac{x^2}{2}+x}$$

$$\longrightarrow \quad \underline{y'(0) = c_1 = 1}$$

Die gesuchte Lösung ist $\underline{y(x) = x\,e^{\frac{x^2}{2}+x}}$.

c) Mit y_p aus $Ly_p = x\,e^{\frac{x^2}{2}}$ ist die allgemeine Lösung durch $\underline{y(x) = \underbrace{(c_1 x + c_2)\,e^{\frac{x^2}{2}+x}}_{(2)} + y_p(x)}$ gegeben.

<u>Berechnen von y_p:</u>

Ansatz $y_p = e^{\frac{x^2}{2}+x}\, w$, gemäß a) erhält man

$$e^{\frac{x^2}{2}+x}\, w''(x) = x\,e^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{(siehe (1))}$$

$$\longrightarrow \quad w''(x) = x\,e^{-x} \xrightarrow[\text{Bronstein}]{} w(x) = e^{-x}(x+2)$$

und also: $\underline{y_p(x) = (x+2)\,e^{\frac{x^2}{2}}}$