

Aufgabe 1) Es sei  $y$  Lösung. Berechne zunächst  $y'$  in Abhängigkeit von  $y$ :  $y' = p(y)$   
 1. Gesucht ist  $p = p(t)$  mit  $2p(t)p'(t) + p^2(t) = t$

$$(p^2)'(t) + p^2(t) = t$$

mit  $P(t) = p^2(t)$ :  $\dot{P}(t) + P(t) = t$

(mit Hinweis)  $\Rightarrow P(t) = p^2(t) = t - 1 + c e^{-t}$   $c$  konst.

$$\Rightarrow (y')^2(x) = p^2(y(x)) = y(x) - 1 + c e^{-y(x)}$$

2. Hieraus ist  $y = y(x)$  zu berechnen.

mit  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  folgt  $0 = c e^{-1} \Rightarrow c = 0$ ,

so dass  $y = y(x)$  aus

$$(y')^2(x) = y(x) - 1 \quad \text{zu berechnen ist.}$$

$$\Rightarrow y(x) \geq 1 \quad \Rightarrow y'(x) = \pm \sqrt{y(x) - 1}$$

$$\Rightarrow 2 \sqrt{y(x) - 1} = \pm (x + c_1) \quad c_1 \text{ konstant}$$

$y(0) = 1 \rightarrow c_1 = 0$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{4} x^2 + 1$$

Aufgabe 2) a) Ansatz  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ . Man erhält:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k, \quad y'(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$3 \quad -2a_0 - 2a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} [a_k (k+1)(k-2) + 2a_{k-1} (k-1)] x^k = 0$$

Koeff.vergleich

$\Rightarrow$  Rekursionsformel für die  $a_k$ :

$$2 \quad \text{(RI)} \quad \underline{a_0 = 0, a_1 = 0} ; \quad \underline{a_k (k+1)(k-2) = -2(k-1)a_{k-1}} \quad \underline{k=2, 3, \dots}$$

b)  $a_0 = a_1 = 0$

Setze in (RI)  $k=2$  :  $a_2 \cdot 0 = -2 \cdot 0$

$\Rightarrow$   $a_2$  ist beliebig

$$3 \quad \text{(RI)} \Rightarrow \quad a_k = \frac{-2(k-1)}{(k+1)(k-2)} a_{k-1} \quad | \quad k=3, 4, \dots$$

also:  $a_3 = -a_2$

$$a_4 = -2 \frac{3}{5 \cdot 2} a_3 = \frac{3}{5} a_2$$

$$2 \quad \text{c) } \underline{\text{Konvergenzradius}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k-1}}{a_k} \right| = \infty \quad \text{(RI)}$$

Aufgabe 3

$$y' = v \Rightarrow v'' + 2v' + v = x + 2e^{-x} \quad (*)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung mit dem Ansatz

$$v(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$v_H = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \quad (**)$$

partikuläre Lösung für (\*):

$$v_{p1}: v'' + 2v' + v = x \quad \text{Ansatz } v(x) = ax + b$$

$$\Rightarrow \underline{v_{p1}(x) = x - 2}$$

$$v_{p2}: v'' + 2v' + v = 2e^{-x} \quad \text{Ansatz: } v(x) = ax^2 e^{-x}$$

(wegen (\*\*))

$$\Rightarrow \underline{v_{p2}(x) = x^2 e^{-x}}$$

allgemeine Lösung von (\*):

$$\underline{v(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x - 2 + x^2 e^{-x} = y'(x)}$$

Mit den Hinweisen erhält man die allgemeine Lösung der vorgelegten Gleichung:

$$\underline{y(x) = d_1 e^{-x} + d_2 x e^{-x} - x^2 e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 - 2x + d_3}$$

hier sind  $d_1, d_2, d_3$  beliebige Konstanten

Aufgabe 4)

1. gesucht sind 3 l.u. Lösungen  $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$  von  $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$   
 mit  $Y(t) = [\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \vec{y}_3(t)]$  ist dann  $\exp(tA) = Y(t)Y^{-1}(t)$ .

2. Die Lösung des AWP ist  $\vec{y}(t) = \exp(tA)\vec{y}(0)$ .

zu 1.: EW und EV von A

$$\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 2$$

$$\text{EV zu } \lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

II Ist  $\vec{v}$  EV zu  $\lambda$ , so ist  $e^{tA}\vec{v} = e^{\lambda t}\vec{v}$  Lösung.

$$\text{also: } \vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

$$\text{EV zu } \lambda_2 = 2: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{III} \Rightarrow \vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Eine weitere Lösung erhält man mit dem Ansatz

$$\vec{y}_3(t) = e^{2t}(\vec{a} + \vec{b}t)$$

Einsetzen in die Dgl und Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\text{IV} (A - 2E)\vec{a} = \vec{b}$$

$$(A - 2E)\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow (\text{siehe oben}) \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{V} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und somit: } \vec{y}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

noch Aufgabe 4

$$Y_H(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ e^t & e^{2t} & te^{2t} \\ e^t & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow P_{cor}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1. |  $\Rightarrow$ )

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1+t) & -te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + e^{2t}(1+t) & e^t - te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Z. 2. Die Lösung des AWP ist:

$$\vec{y}(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4t \\ 1+4t \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} e^t$$