

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1:

- (a) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir setzen

$$p(x) = - \left(2 + \frac{2x-1}{x^2-x+1} \right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Der Ansatz $y_2 = v y_1$ (Reduktionsverfahren von d'Alembert) führt auf die Differentialgleichung

$$v''(x) + v'(x) \underbrace{\left(\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x) \right)}_{=:r(x)} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für v' . Ihre allgemeine Lösung ist durch $v'(x) = C e^{-\int r(x) dx}$ für $x \in \mathbb{R}$ mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir berechnen

$$r(x) = 4 - 2 - \frac{2x-1}{x^2-x+1} = 2 - \frac{2x-1}{x^2-x+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int r(x) dx &= 2x - \int \underbrace{\frac{2x-1}{x^2-x+1}}_{>0} dx \\ &\stackrel{y=x^2-x+1}{\stackrel{dx=\frac{dy}{2x-1}}{=}} 2x - \int \frac{1}{y} dy \\ &= 2x - \log(y) = 2x - \log(x^2-x+1) \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

und folglich $v'(x) = C(x^2-x+1)e^{-2x}$ für $x \in \mathbb{R}$. Unbestimmte Integration liefert

$$\begin{aligned} \int \underbrace{(x^2-x+1)}_{=:u(x)} \underbrace{e^{-2x}}_{=:v'(x)} dx &\stackrel{\text{Part. Int.}}{=} -\frac{e^{-2x}}{2}(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \int \underbrace{(2x-1)}_{=:u(x)} \underbrace{e^{-2x}}_{=:v'(x)} dx \\ &\stackrel{\text{Part. Int.}}{=} -\frac{e^{-2x}}{2}(x^2-x+1) - \frac{1}{4}(2x-1)e^{-2x} + \frac{1}{4} \int 2e^{-2x} dx \\ &= -\frac{e^{-2x}}{2} \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} e^{-2x} \\ &= -\frac{e^{-2x}}{2} (x^2+1) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Wiedereinsetzen in den Ansatz $y_2 = v y_1$ und Entfernen der Konstanten liefert

$$y_2(x) = x^2 + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Die allgemeine Lösung y der gegebenen Differentialgleichung lautet dann $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

- (b) Die vorliegende Differentialgleichung ist eine Bernoullische Differentialgleichung ($\alpha = -2$). Wir setzen $v = u^3$. Dann ist $v' = 3u^2u'$. Damit gehen wir in die Differentialgleichung ein

$$u'(t) + 2tu(t) - \frac{t}{u^2(t)} = 0 \Leftrightarrow 3u^2(t)u'(t) + 6tu^3(t) - 3t = 0 \Leftrightarrow v'(t) + 6tv(t) = 3t.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für v . Eine partikuläre Lösung $v_p(t) = \frac{1}{2}$ für $t \in \mathbb{R}$ ist durch „scharfes Hinsehen“TM zu erraten (alternativ berechnet man sie durch die Variation-der-Konstanten-Formel).

Die Lösung der homogenen Gleichung ist durch

$$v_h(t) = Ce^{-\int 6t dt} = Ce^{-3t^2} \quad (t \in \mathbb{R})$$

gegeben, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine freie Konstante ist. Damit ist

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = Ce^{-3t^2} + \frac{1}{2} \quad (t \in \mathbb{R})$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für v .

Die Anfangsbedingung $u(0) = 1$ liefert $v(0) = u^3(0) = 1$. Damit wird die Konstante $C = \frac{1}{2}$ festgelegt. Rücktransformation liefert

$$u(t) = \sqrt[3]{v(t)} = \sqrt[3]{\frac{e^{-3t^2} + 1}{2}} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2:

- (a) Sei

$$P(x, y) := 2x - 3y, \quad Q(x, y) := 2y - 3x \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Es gilt

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -3 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Folglich ist die vorliegende Differentialgleichung exakt auf \mathbb{R}^2 . Wir bestimmen nun eine Stammfunktion F des Gradientenfeldes $\nabla F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$. Es gilt

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi_2(y) = \int 2x - 3y dx + \varphi_2(y) = x^2 - 3xy + \varphi_2(y),$$

$$F(x, y) = \int Q(x, y) dy + \varphi_1(x) = \int 2y - 3x dy + \varphi_1(x) = y^2 - 3xy + \varphi_1(x) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Die Wahl $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(y) = y^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$ liefert eine gesuchte Stammfunktion

$$F(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Durch die Anfangsbedingung ist die Lösung in impliziter Form durch

$$x^2 - 3xy + y^2 = F(x, y) = \text{const} = F(0, 2) = 4$$

gegeben. Auflösen dieser Gleichung nach y liefert

$$y(x) = \frac{3}{2}x \pm \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - x^2 + 4} = \frac{3}{2}x \pm \sqrt{\frac{5x^2}{4} + 4}.$$

Die zwei Lösungen schneiden sich nicht. Wegen der Anfangsbedingung, muss

$$y(x) = \frac{3}{2}x + \sqrt{\frac{5x^2}{4} + 4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

gelten.

- (b) Die vorliegende Differentialgleichung ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ihr charakteristisches Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Folglich bilden

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Gleichung.

Wir setzen $f_1(x) = -2x$, $f_2(x) = \sin(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und suchen partikuläre Lösungen für die Inhomogenitäten f_1 bzw. f_2 separat.

- f_1 : Es ist

$$f_1(x) = -2x = q(x)e^{\sigma x} \cos(\omega x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

wobei $q(x) = -2x$ ein Polynom ersten Grades und $\sigma + i\omega = 0$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Folglich lautet der Ansatz von der Form der rechten Seite

$$y_p^{(1)}(x) = x(a_0 + a_1x) = a_0x + a_1x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p^{(1)''}(x) - 2y_p^{(1)'}(x) &= f_1(x) \Leftrightarrow 2a_1 - 2a_0 - 4a_1x = -2x \\ \text{Koeff.-Vergleich} \Leftrightarrow -4a_1 &= -2 \quad \wedge \quad 2a_1 - 2a_0 = 0 \\ a_1 &= \frac{1}{2} \quad \wedge \quad a_0 = a_1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Folglich ist $y_p^{(1)}(x) = \frac{x(1+x)}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- f_2 : Es ist

$$f_2(x) = \sin(2x) = q(x)e^{\sigma x} \sin(\omega x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

wobei $q(x) \equiv 1$ ein Polynom nullten Grades und $\sigma + i\omega = 2i$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Folglich lautet der Ansatz von der Form der rechten Seite

$$y_p^{(2)}(x) = (a_0 \cos(2x) + a_1 \sin(2x)) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p^{(2)''}(x) - 2y_p^{(2)'}(x) &= f_2(x) \\ \Leftrightarrow -4a_0 \cos(2x) - 4a_1 \sin(2x) + 4a_0 \sin(2x) - 4a_1 \cos(2x) &= \sin(2x) \\ \text{Koeff.-Vergleich} \Leftrightarrow -4a_0 - 4a_1 &= 0 \quad \wedge \quad -4a_1 + 4a_0 = 1 \\ a_0 &= -a_1 \quad \wedge \quad a_0 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Folglich ist $y_p^{(2)}(x) = \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Insgesamt ist

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p^{(1)}(x) + y_p^{(2)}(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{x(1+x)}{2} + \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3:

Wir setzen

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und beobachten} \quad DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} = ND.$$

Dann ist $A = D + N$ und $e^{tA} = e^{t(D+N)} = e^{tD}e^{tN}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} e^{tD} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} 2^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} 2^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned} N^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = (-1)3^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow N^{2k} = (-1)^k 3^{2k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{N}), \\ &\Rightarrow N^{2k+1} = (-1)^k 3^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} e^{tN} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = I_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = I_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} N^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} N^{2k+1} \\ &= I_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k} t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (3t)^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (3t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cos(3t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(3t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(3t) & \sin(3t) \\ 0 & -\sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ausführen des Matrixproduktes liefert

$$e^{tA} = e^{tD}e^{tN} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} \cos(3t) & e^{2t} \sin(3t) \\ 0 & -e^{2t} \sin(3t) & e^{2t} \cos(3t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Variation-der-Konstanten-Formel liefert

$$y(t) = \underbrace{e^{tA}y(0)}_{=:y_h(t)} + \underbrace{e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} b(\tau) d\tau}_{y_p(t)}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Demnach

$$\begin{aligned}
 y_h(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \cos(3t) \\ -e^{2t} \sin(3t) \end{pmatrix}, \\
 y_p(t) &= e^{tA} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\tau} \cos(3\tau) & -e^{-2\tau} \sin(3\tau) \\ 0 & e^{-2\tau} \sin(3\tau) & e^{-2\tau} \cos(3\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\tau} \\ -2 \cos(3\tau) \\ 2 \sin(3\tau) \end{pmatrix} d\tau \\
 &= e^{tA} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2\tau} \\ -2e^{-2\tau}(\cos^2(3\tau) + \sin^2(3\tau)) \\ -2e^{-2\tau}(\cos(3\tau) \sin(3\tau) - \sin(3\tau) \cos(3\tau)) \end{pmatrix} d\tau = e^{tA} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2\tau} \\ -2e^{-2\tau} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \\
 &= e^{tA} \begin{pmatrix} \frac{1-e^{-2t}}{2} \\ e^{-2t} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} \cos(3t) & e^{2t} \sin(3t) \\ 0 & -e^{2t} \sin(3t) & e^{2t} \cos(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-e^{-2t}}{2} \\ e^{-2t} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ (1 - e^{2t}) \cos(3t) \\ (e^{2t} - 1) \sin(3t) \end{pmatrix}, \\
 y(t) &= y_h(t) + y_p(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cos(3t) \\ -\sin(3t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

(a) Wir setzen

$$a(x, t, w) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b(x, t, w) = tw.$$

Das charakteristische System $k(s)' = a(k(s), w(s))$, $w' = b(k(s), w(s))$ lautet dann

$$k_1'(s) = k_1(s), \tag{1}$$

$$k_2'(s) = 1, \tag{2}$$

$$w'(s) = k_2(s)w(s) \quad (s \in I) \tag{3}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$k_1(0) = x_0, \tag{4}$$

$$k_2(0) = 0, \tag{5}$$

$$w(0) = u(k(0)) = x_0^2 \quad (x_0 \in \mathbb{R}). \tag{6}$$

Die Differentialgleichungen (1), (2) liefern zusammen mit den Anfangswerten (4), (5) die Grundcharakteristiken

$$k_1(s) = x_0 e^s, \tag{7}$$

$$k_2(s) = s \quad (s \in \mathbb{R}). \tag{8}$$

. Einsetzen von (8) in (3) liefert mit dem Anfangswert (6) das Anfangswertproblem

$$w'(s) = sw(s), \quad w(0) = x_0^2 \geq 0 \quad (s \in \mathbb{R})$$

in getrennten Veränderlichen. Für $x_0 = 0$ ist $w \equiv 0$. Für $x_0 \neq 0$ löst man zunächst formal

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{ds} &= sw \rightsquigarrow \frac{1}{w} dw = s ds \rightsquigarrow \int_{x_0^2}^{w(s)} \frac{1}{\eta} d\eta = \int_0^s \xi d\xi \\
 \stackrel{x_0^2 > 0}{\Leftrightarrow} [\log(|\eta|)]_{\eta=x_0^2}^{w(s)} &= \frac{s^2}{2} \Leftrightarrow \log(|w(s)|) = \frac{s^2}{2} + \log(x_0^2) \\
 \Leftrightarrow |w(s)| &= x_0^2 e^{\frac{s^2}{2}} \quad (s \in \mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

Wegen des Anfangswertes $w(0) = x_0^2 > 0$ ist $w(s) = x_0^2 e^{\frac{s^2}{2}}$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $w(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$, was im Nachhinein die Trennung der Veränderlichen rechtfertigt.

Zum gegebenen $x > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ versucht man nun die Gleichung $(x, t) = k(s) = k(s, x_0)$ nach (s, x_0) aufzulösen. Es gilt

$$\begin{aligned} k(s, x_0) &= (x, t) \\ \Leftrightarrow x_0 e^s &= x \quad \wedge \quad s = t \\ \Leftrightarrow x_0 &= x e^{-t} \quad \wedge \quad s = t. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$u(x, t) = w(s, x_0) = x_0^2 e^{\frac{s^2}{2}} = x^2 e^{-2t + \frac{t^2}{2}} \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2).$$

(b) Einsetzen des gegebenen Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$-\omega^2 e^{i\omega t} v(x) - x^2 v''(x) e^{i\omega t} = 0 \stackrel{e^{i\omega t} \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 v''(x) + \omega^2 v(x) = 0.$$

Dies ist eine Eulersche Differentialgleichung. Deshalb führen die Substitutionen $x = e^s$, $u(s) = v(e^s)$ und folglich $u'(s) = e^s v'(e^s) = x v'(x)$, $u''(s) = e^{2s} v''(e^s) + e^s v'(e^s) = x^2 v''(x) + x v'(x)$ auf die lineare, homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für u

$$u''(s) - u'(s) + \omega^2 u(s) = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser Gleichung lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \omega^2 \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

und hat die Nullstellen $\lambda_1 = \frac{1}{2} - i\sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + i\sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}}$. Folglich ist die allgemeine Lösung der Gleichung für u durch

$$u(s) = C_1 e^{\frac{s}{2}} \cos\left(\sqrt{4\omega^2 - 1} \frac{s}{2}\right) + C_2 e^{\frac{s}{2}} \sin\left(\sqrt{4\omega^2 - 1} \frac{s}{2}\right) \quad (s \in \mathbb{R})$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ gegeben. Resubstitution von $s = \log(x)$ liefert

$$v(x) = C_1 \sqrt{x} \cos\left(\sqrt{4\omega^2 - 1} \frac{\log(x)}{2}\right) + C_2 \sqrt{x} \sin\left(\sqrt{4\omega^2 - 1} \frac{\log(x)}{2}\right) \quad (x > 0),$$

bzw.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{i\omega t} \sqrt{x} \left(C_1 \cos\left(\sqrt{4\omega^2 - 1} \log(\sqrt{x})\right) \right. \\ &\quad \left. + C_2 \sin\left(\sqrt{4\omega^2 - 1} \log(\sqrt{x})\right) \right) \quad (x > 0, t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$