

## Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

### Modulprüfung

#### Aufgabe 1 (6+4=10 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Euler-Differentialgleichung

$$x^3 y'''(x) - 6y(x) = 3, \quad x > 0, \quad (1)$$

mithilfe einer geeigneten Substitution.

- (b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = -1,$$

unendlich viele Lösungen  $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  besitzt und geben Sie diese explizit an.

#### Aufgabe 2 (1+4+3+2=10 Punkte)

Auf der Menge  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$  werde die Differentialgleichung

$$(xy^2 + y) dx - (x \ln x) dy = 0 \quad (2)$$

betrachtet.

- (a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung (2) nicht exakt ist.
- (b) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor  $\mu : D \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  der Form  $\mu(x, y) = \frac{1}{x} y^\alpha$  mit geeignetem  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (c) Geben Sie die Lösungen der Differentialgleichung (2) in impliziter Form an.
- (d) Bestimmen Sie explizit diejenige Lösung  $y = y(x)$  mit  $y(e) = \frac{1}{e}$  und geben Sie das maximale Existenzintervall dieser Lösung an.

### Aufgabe 3 ((1+5+1)+3=10 Punkte)

(a) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + x_2(t).\end{aligned}$$

(i) Schreiben Sie das System in der Form  $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$  mit einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und der vektorwertigen Funktion  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ .

(ii) Berechnen Sie die Matrix  $e^{tA}$ .

ZUR KONTROLLE: Die Matrix  $A$  besitzt die Eigenwerte 0 und 2.

(iii) Geben Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems  $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$  an.

(b) Sei  $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $d \geq 2$ , eine Matrix mit Eigenvektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\vec{y}}(t) = B\vec{y}(t) + t\vec{v}, \quad \vec{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 4 (6+4=10 Punkte)

(a) Es sei  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$  und  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}$ . Bestimmen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned}x\partial_y u - y\partial_x u &= u \quad \text{in } U, \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma,\end{aligned}$$

mit  $g \in \mathcal{C}^1((0, \infty))$  mithilfe des Charakteristikenverfahrens.

HINWEIS:  $\exp \left[ t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ .

(b) Betrachten Sie das folgende Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung mit Quellterm

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) &= \partial_x^2 u(t, x) - m^2 u(t, x), & (t, x) &\in (0, \infty) \times (0, 2\pi), \\ u(t, 0) &= u(t, 2\pi) = 0, & t &> 0.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für nicht-triviale Lösungen  $u(t, x) = e^{-\mu t} v(x)$  der Parameter  $\mu$  von der Form

$$\mu = k^2 + m^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

sein muss.

## Viel Erfolg!

#### Hinweise für nach der Klausur:

- Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **17.04.2018** durch Aushang am schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 des Gebäudes 20.30 bekannt gegeben.
- Einsichtnahme in die korrigierten Bachelor-Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **19.04.2018**, zwischen **16:00** und **18:00** im Hörsaal am Fasanengarten statt.
- Mündliche Nachprüfungen finden voraussichtlich in der Woche vom **23.04.** bis **27.04.2018** im Gebäude 20.30 statt.