

## Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

### Bachelor-Modulprüfung

#### Aufgabe 1: (7 + 3 = 10 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Lösung des Eulerschen Anfangswertproblems

$$t^2 u''(t) + tu'(t) + 4u(t) = \sin(\log(t^2)) \quad (t > 0), \quad u(1) = 1, \quad u'(1) = -\frac{1}{4}.$$

(b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{\cos(x)}{2} (y^3(x) - y(x)) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Hinweis:** Das Verfahren der Trennung der Variablen ist hier anwendbar, rechnerisch aber aufwendiger.

#### Aufgabe 2: (10 Punkte)

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) y(x) = 0 \quad (x > 0)$$

mittels des abgewandelten Potenzreihenansatzes

$$y(x) = x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (x > 0),$$

wobei  $\rho \in \mathbb{R}$  und  $a_0 = 1$ . Geben Sie dabei  $y$ , soweit möglich, in geschlossener Form an.

**Aufgabe 3:** (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:A} \vec{y}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 8t^2 \\ 0 \\ 4t \end{pmatrix}}_{=: \vec{b}(t)} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

indem Sie zunächst  $e^{tA}$  für  $t \in \mathbb{R}$  berechnen.**Aufgabe 4:** (5 + 5 = 10 Punkte)

Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \left( \frac{x}{1+t} \right) u_x(x, t) + u_t(x, t) &= -2tu(x, t) & (x \in \mathbb{R}, t \geq 0), \\ u(x, 0) &= x & (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

- (a) mit dem Charakteristikenverfahren bzw.
- (b) durch den Separationsansatz  $u(x, t) = f(x)g(t)$ .

**Viel Erfolg!**Ergebnisse der Modulprüfung werden am Freitag, den **16.10.2015**, veröffentlicht.Einsichtnahme in die korrigierten Bachelor-Modulprüfungen findet am Mittwoch, den **21.10.2015**, von **16:00 bis 18:00** Uhr im Tulla-Hörsaal (Gebäude 11.40) statt.Mündliche Nachprüfungen finden in der Woche vom **26.10.2015** bis **30.10.2015** im Kollegiengebäude Mathematik (Gebäude 20.30) statt.