**Institut für Analysis**
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
17.09.2015

# Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

## Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

### Aufgabe 1:

(a) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Eulersche Differentialgleichung. Deshalb führen wir die Substitution $t = e^x$ durch und setzen $v(x) = u(e^x)$. Dann ist $v'(x) = e^x u'(e^x)$ und $v''(x) = e^{2x}u''(e^x) + e^x u'(e^x)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} t^2u''(t) + tu'(t) + 4u(t) &= \sin\left(\log(t^2)\right) \\ \Leftrightarrow e^{2x}u''(e^x) + e^x u(e^x) + 4u(e^x) &= \sin\left(\log(e^{2x})\right) \\ \Leftrightarrow v''(x) + 4v(x) &= \sin(2x). \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ihr charakteristisches Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4 = (\lambda - 2\mathrm{i})(\lambda + 2\mathrm{i}) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Damit bilden $v_1$ und $v_2$ mit

$$v_1(x) = \cos(2x), \qquad v_2(x) = \sin(2x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.

Für eine partikuläre Lösung $v_p$ der inhomogenen Gleichung machen wir einen Ansatz „von der Form der rechten Seite". Da $2\mathrm{i}$ eine einfache Nullstelle von $p$ ist, lautet dieser

$$v_p(x) = x\left[A\cos(2x) + B\sin(2x)\right] \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

mit zu bestimmenden Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Wir berechnen

$$v_p''(x) = -4x\left[A\cos(2x) + B\sin(2x)\right] + 4\left[B\cos(2x) - A\sin(2x)\right] \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} v_p''(x) + 4v_p(x) &= \sin(2x) \\ \Leftrightarrow -4x\left[A\cos(2x) + B\sin(2x)\right] + 4\left[B\cos(2x) - A\sin(2x)\right] & \\ +4x\left[A\cos(2x) + B\sin(2x)\right] &= \sin(2x) \\ \Leftrightarrow 4B\cos(2x) - (4A+1)\sin(2x) &= 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit der Wahl $A = -\frac{1}{4}$, $B = 0$ ist $v_p$ also tatsächlich eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $v$ lautet also

$$v(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) - \frac{x}{4}\cos(2x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

mit

$$v'(x) = -2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{x}{2}\sin(2x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nach der Substitutionsvorschrift übersetzen sich die Anfangsbedingungen für $u$ zu $v(0) = u(1) = 1$ und $v'(0) = 1 \cdot u'(1) = -\frac{1}{4}$. Dies legt $C_1 = 1$ und $C_2 = 0$ fest.

Rücktransformieren liefert

$$u(t) = \cos\left(\log\left(t^2\right)\right)\left(1 - \frac{\log(t)}{4}\right) \qquad \forall t > 0$$

als Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems.

(b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Bernoullische Differentialgleichung ($\alpha = 3$). Da $y(0) > 0$, suchen wir zunächst Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ mit $y(x) > 0$ für alle $x \in I$ für ein Intervall $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$. Solche Lösungen erfüllen die Differentialgleichung

$$-\frac{2}{y^3(x)}y'(x) = \frac{\cos(x)}{y^2(x)} - \cos(x) \qquad (x \in I).$$

Definiere $u(x) := \frac{1}{y^2(x)}$ für $x \in I$. Dann ist $u'(x) = -\frac{2y'(x)}{y^3(x)}$ für $x \in I$ und $u$ erfüllt die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$u'(x) = \cos(x)u(x) - \cos(x) \qquad (x \in I)$$

und die Anfangsbedingung $u(0) = \frac{1}{y^2(0)} = 2$.

Die homogene Lösung $u_h$ lautet

$$u_h(x) = Ce^{\int \cos(\xi)\mathrm{d}\xi} = Ce^{\sin(x)} \qquad (x \in I)$$

mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Eine partikuläre Lösung $u_p$ kann leicht zu $u_p \equiv 1$ erraten werden oder mit der Variation-der-Konstanten-Formel errechnet werden.

Damit ist $u(x) = Ce^{\sin(x)} + 1$ für $x \in I$. Die Anfangsbedingung $u(0) = 2$ legt $C = 1$ fest. Also ist $u(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, womit $I = \mathbb{R}$ gilt. Wegen $y(0) > 0$, ist $y(x) = \frac{1}{+\sqrt{u(x)}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Lösung des ursprünglichen Problems lautet also

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\sin(x)}}} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

## Aufgabe 2:

Für den gegebenen abgewandelten Potenzreihenansatz gilt

$$\begin{aligned}
y(x) &= x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\
xy'(x) &= x\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{n+\rho} = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\rho)x^{n+\rho-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\rho)x^{n+\rho} \\
&= x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\rho)x^n, \\
x^2y''(x) &= x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} x^{n+\rho} = x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{n+\rho-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{n+\rho} = x^\rho\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^n \qquad (x > 0).
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}
x^2y''(x)+xy'(x)-\left(x^2+\frac{1}{4}\right)y(x) &= x^\rho\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^n+x^\rho\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\rho)x^n \\
&\quad -x^\rho\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}-\frac{1}{4}x^\rho\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \qquad (x>0) \\
\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n\underbrace{\left[(n+\rho)^2-\frac{1}{4}\right]}_{=:f(n+\rho)}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}\overset{\text{Index-Shift}}{=}\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n \qquad (x>0) \\
\overset{\text{Koeffizienten-}}{\Leftrightarrow} f(n+\rho)a_n &= a_{n-2}\quad \forall n\geq 2, \qquad f(1+\rho)a_1=0, \qquad f(\rho)=0.
\end{aligned}$$

Die determinierende Gleichung

$$f(\rho)=\rho^2-\frac{1}{4}=0$$

hat genau die Lösungen $\rho_1=-\frac{1}{2}$ und $\rho_2=\frac{1}{2}$.

- $\rho=\rho_2=\frac{1}{2}$: Es gilt

$$f(n+\rho)=(n+\rho)^2-\frac{1}{4}=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=n^2+n=n(n+1) \qquad \forall n\in\mathbb{N}_0.$$

  Die Rekurrenzgleichungen liefern deshalb

$$\begin{aligned}
f(\rho+1)a_1 &= 2a_1=0\Rightarrow a_1=0, \\
f(\rho+n)a_n &= n(n+1)a_n=a_{n-2} \qquad \forall n\geq 2 \\
\Leftrightarrow a_n &= \frac{a_{n-2}}{n(n+1)} \qquad \forall n\geq 2.
\end{aligned}$$

  Damit ist $a_{2k+1}=0$ für alle $k\in\mathbb{N}_0$ und

$$a_{2k}=\frac{a_{2(k-1)}}{(2k)(2k+1)}=\ldots=\frac{1}{(2k+1)!} \qquad \forall k\in\mathbb{N}_0.$$

  Damit definiert

$$y_2(x)=x^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sinh(x) \qquad (x>0)$$

  eine nichttriviale Lösung der Differentialgleichung.

- $\rho=\rho_1=-\frac{1}{2}$: Es gilt

$$f(n+\rho)=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=n^2-n=n(n-1) \qquad \forall n\in\mathbb{N}_0.$$

  Die Rekurrenzgleichungen liefern deshalb

$$\begin{aligned}
f(\rho+1)a_1 &= 0\cdot a_1=0, \\
f(\rho+n)a_n &= n(n-1)a_n=a_{n-2} \qquad \forall n\geq 2 \\
\Leftrightarrow a_n &= \frac{a_{n-2}}{n(n-1)} \qquad \forall n\geq 2.
\end{aligned}$$

  Damit ist $a_1$ frei wählbar, etwa $a_1=0$. Dann ist $a_{2k+1}=0$ für alle $k\in\mathbb{N}_0$ und

$$a_{2k}=\frac{a_{2(k-1)}}{(2k)(2k-1)}=\ldots=\frac{1}{(2k)!} \qquad \forall k\in\mathbb{N}_0.$$

Damit definiert

$$y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cosh(x) \qquad (x > 0)$$

eine weitere Lösung der Differentialgleichung.

Damit lautet die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = \frac{C_1 \sinh(x) + C_2 \cosh(x)}{\sqrt{x}} \qquad \forall x > 0$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 3:**
Wir setzen

$$D := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und beobachten} \quad DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND.$$

Dann ist $A = D + N$ und $e^{tA} = e^{t(D+N)} = e^{tD}e^{tN}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} e^{tD} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k t^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k t^k}{k!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir berechnen weiter

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N^k = 0 \qquad (k \geq 2).$$

Damit folgt

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ausführen des Matrixproduktes liefert

$$e^{tA} = e^{tD}e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 2te^{2t} \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Variation-der-Konstanten-Formel liefert

$$y(t) = \underbrace{e^{tA}y(0)}_{=:y_h(t)} + \underbrace{e^{tA}\int_0^t e^{-\tau A} b(\tau) \mathrm{d}\tau}_{=:y_p(t)} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Demnach

$$
\begin{aligned}
y_h(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \\
y_p(t) &= e^{tA} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2\tau} & 0 & -2\tau e^{-2\tau} \\ 0 & e^{-\tau} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8\tau^2 \\ 0 \\ 4\tau \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = e^{tA} \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\tau e^{-2\tau} \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} e^{tA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\left[\tau e^{-2\tau}\right]_{\tau=0}^t + 2\int_0^t e^{-2\tau}\mathrm{d}\tau \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2te^{-2t} - \left[e^{-2\tau}\right]_{\tau=0}^t \end{pmatrix} \\
&= e^{tA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2te^{-2t} + 1 - e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 2te^{2t} \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2te^{-2t} + 1 - e^{-2t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2te^{2t} - 4t^2 - 2t \\ 0 \\ e^{2t} - 2t - 1 \end{pmatrix}, \\
y(t) &= y_h(t) + y_p(t) = \begin{pmatrix} 4t\left(e^t \sinh(t) - t\right) \\ e^t \\ 2\left(e^t \sinh(t) - t\right) \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

## Aufgabe 4:

(a) Wir setzen

$$
a(x,t,w) = \begin{pmatrix} \frac{x}{1+t} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b(x,t,w) = -2tw.
$$

Das charakteristische System $k'(s) = a(k(s), w(s)), w'(s) = b(k(s), w(s))$ lautet dann

$$
\begin{aligned}
k_1'(s) &= \frac{k_1(s)}{1+k_2(s)}, && (1) \\
k_2'(s) &= 1, && (2) \\
w'(s) &= -2k_2(s)w(s) \qquad (s \in I) && (3)
\end{aligned}
$$

mit den Anfangsbedingungen

$$
\begin{aligned}
k_1(0) &= x_0, && (4) \\
k_2(0) &= 0, && (5) \\
w(0) &= u(k(0)) = x_0 \qquad (x_0 \in \mathbb{R}). && (6)
\end{aligned}
$$

Die Differentialgleichung (2) zusammen mit der Anfangsbedingung (5) liefert

$$
k_2(s) = s \qquad (s \in \mathbb{R}). \tag{7}
$$

Einsetzen dieser Lösung in die Differentialgleichung (1) liefert

$$
k_1'(s) = \frac{k_1(s)}{1+s} \qquad (s > -1).
$$

Also ist $k_1(s) = C_1(1+s)$ für $s > -1$ mit der zu bestimmenden Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$. Ausnutzen der Anfangsbedingung (4) ergibt $C_1 = x_0$. Einsetzen der Grundcharakteristiken $s \mapsto (k_1(s), k_2(s))$ in die Differentialgleichung (3) und Ausnutzen der Anfangsbedingung (6) liefert

$$
w(s) = e^{-s^2} x_0 \qquad (s > -1).
$$

Zum gegebenen $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ versucht man nun die Gleichung $(x,t) = k(s) = k(s, x_0)$ nach $(s, x_0)$ aufzulösen. Es gilt

$$\begin{aligned} k(s, x_0) &= (x, t) \\ \Leftrightarrow x = x_0(1+s) &\wedge s = t \\ \Leftrightarrow x_0 = \frac{x}{1+t} &\wedge s = t. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$u(x,t) = w(s, x_0) \Leftrightarrow u(x,t) = e^{-t^2}\frac{x}{1+t} \qquad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0).$$

(b) Einsetzen des gegebenen Ansatzes in die Anfangsbedingung liefert

$$u(x,0) = f(x)g(0) = x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

also etwa $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $g(0) = 1$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{1+t}\right) u_x(x,t) + u_t(x,t) &= -2tu(x,t) \\ \Leftrightarrow \frac{xf'(x)}{1+t} g(t) + f(x)g'(t) &= -2tf(x)g(t) \\ \Leftrightarrow xg'(t) &= -x\left(2t + \frac{1}{1+t}\right) g(t) \qquad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0) \\ \Leftrightarrow g'(t) &= -\left(2t + \frac{1}{1+t}\right) g(t) \qquad (t \geq 0). \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für $g$. Wegen

$$\int_0^t 2s + \frac{1}{1+s} \mathrm{d}s = t^2 + \log(1+t) \qquad (t \geq 0)$$

und der Anfangsbedingung $g(0) = 1$, lautet Ihre Lösung

$$g(t) = e^{-t^2}\frac{1}{1+t} \qquad (t \geq 0).$$

Insgesamt ist also

$$u(x,t) = f(x)g(t) = \frac{x}{1+t}e^{-t^2} \qquad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$$

die gesuchte Lösung mit separierten Veränderlichen.