Karlsruher Institut für Technologie (KIT) | Frühjahr 2010
Institut für Analysis | 03.03.2010
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Bachelor–Modulprüfung
Komplexe Analysis und Integraltransformationen
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (3+3+4=10 Punkte)

a) Bestimmen Sie mit der Laplacetransformationsmethode die Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = (1+3t)e^{-t}\,, \qquad t \geqslant 0\,,$$

die den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad y'(0) = -1$$

genügt.

b) Ein System mit Eingang u und Ausgang y sei durch die Differentialgleichung

$$y'' + 3y' + 2y = u' + 4u$$

gegeben. Bestimmen Sie die zugehörige Impulsantwort $g(t)$ und die Sprungantwort $h(t)$ des Systems.

c) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1-t & \text{für } t \in [0,2) \\ 3-t & \text{für } t \in [2,4) \\ \sin(t-4) & \text{für } t \geqslant 4 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Ermitteln Sie die distributionelle Ableitung DT_f von T_f und die Laplacetransformierte $\mathscr{L}\{DT_f\}$.

Hinweis für Hörer aus dem SS 2008: $T_f \equiv [f]$.

Lösungsvorschlag

a) Anwendung der Laplacetransformation auf die Gleichung unter Verwendung der Regeln

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\mathscr{L}\{y\}(s) - y(0) \quad \text{und} \quad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0)$$

ergibt

$$(s^2+5s+4)\mathscr{L}\{y\}(s) - s + 1 - 5 = \mathscr{L}\{(1+3t)e^{-t}\}(s)$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit genügend großem Realteil. Wegen

$$\mathscr{L}\{e^{-t}\}(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{und} \quad \mathscr{L}\{3te^{-t}\}(s) = \frac{3}{(s+1)^2}$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > -1$ erhält man

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{y\}(s) &= \frac{1}{s^2+5s+4}\Big(\frac{1}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2} + s + 4\Big) = \frac{s+4}{(s+4)(s+1)}\Big(\frac{1}{(s+1)^2} + 1\Big) \\ &= \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{1}{s+1} \bullet\!\!-\!\!\circ \Big(\frac{t^2}{2} + 1\Big)e^{-t}\sigma(t). \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist also gegeben durch

$$y(t) = \Big(\frac{t^2}{2} + 1\Big)e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

b) Aus der Differentialgleichung liest man die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+2} = \frac{s+4}{(s+2)(s+1)}$$

ab. Der Ansatz

$$\frac{s+4}{(s+2)(s+1)} \overset{!}{=} \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{(A+B)s + 2A + B}{(s+2)(s+1)}$$

führt auf $A + B = 1$, $2A + B = 4$, also auf $A = 3$, $B = -2$. Somit ist

$$G(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2} \bullet\!\!-\!\!\circ \Big(3e^{-t} - 2e^{-2t}\Big)\sigma(t)$$

und die Impulsantwort des Systems ist

$$g(t) = \Big(3e^{-t} - 2e^{-2t}\Big)\sigma(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Sprungantwort $h(t)$ erhält man aus

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{h(t)\}(s) &= G(s)\frac{1}{s} = 3\Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\Big) - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} = \frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+2} \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ\ \sigma(t)\Big(2 - 3e^{-t} + e^{-2t}\Big) \end{aligned}$$

oder aus

$$h(t) = \int_0^t g(\tau)\,d\tau = \int_0^t 3e^{-\tau} - 2e^{-2\tau}\,d\tau = [-3e^{-\tau} + e^{-2\tau}]_{\tau=0}^{\tau=t} = 2 - 3e^{-t} + e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

c) Die Funktion f ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0,2,4\}$ und hat Sprungstellen in $0, 2, 4$ mit Sprunghöhen

$$f(0+) - f(0-) = 1 - 0 = 1,\ f(2+) - f(2-) = 1 - (-1) = 2,\ f(4+) - f(4-) = 0 - (-1) = 1.$$

Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0,2,4\}$ ist f in t differenzierbar mit

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ -1 & \text{für } t \in (0,2) \\ -1 & \text{für } t \in (2,4) \\ \cos(t-4) & \text{für } t > 4 \end{cases}.$$

Definiert man $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(t) = f'(t)$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2, 4\}$ und $g(0) = g(2) = -1$, $g(4) = 1$, so erhält man

$$DT_f = T_g + \delta_0 + 2\delta_2 + \delta_4,$$

dh

$$DT_f(\varphi) = -\int_0^4 \varphi(t)\,dt + \int_4^\infty \cos(t-4)\varphi(t)\,dt + \varphi(0) + 2\varphi(2) + \varphi(4), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Somit ist

$$\mathscr{L}\{DT_f\}(s) = \underbrace{\mathscr{L}\{T_g\}(s)}_{=\mathscr{L}\{g\}(s)} + 1 + 2e^{-2s} + e^{-4s}$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ (beachte, dass g beschränkt ist). Hierbei ist für $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$\mathscr{L}\{g\}(s) = -\int_0^4 e^{-st}\,dt + e^{-4s}\mathscr{L}\{\cos\}(s) = \frac{e^{-4s}-1}{s} + \frac{se^{-4s}}{s^2+1}.$$

Insgesamt ist also

$$\mathscr{L}\{DT_f\}(s) = \frac{e^{-4s}-1}{s} + \frac{se^{-4s}}{s^2+1} + 1 + 2e^{-2s} + e^{-4s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Aufgabe 2 (3+3+4=10 Punkte)

In den folgenden Kurvenintegralen sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$.

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{|z+1-i|=2} \frac{e^z}{z^4-1}\,dz = \int_\gamma \frac{e^z}{z^4-1}\,dz$, wobei $\gamma(t) = -1 + i + 2e^{it}$.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{1/(z-3)}}{(z+1)^2}\,dz = \int_\gamma \frac{e^{1/(z-3)}}{(z+1)^2}\,dz$, wobei $\gamma(t) = 2e^{it}$.

c) Untersuchen Sie, ob sich die durch $F(w) := e^{\sin w}$ definierte Funktion um $w_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln läßt und für welche w diese gegebenenfalls konvergiert. Berechnen Sie dann

$$\int_{|z|=1/2} z\,e^{\sin(1/z)}\,dz = \int_\gamma z\,e^{\sin(1/z)}\,dz,$$

wobei $\gamma(t) = e^{it}/2$.

Lösungsvorschlag

a) Setze $F(z) = \frac{e^z}{z^4-1}$. Die Kurve ist ein Kreis um $-1+i$ mit Radius 2. Es gilt $z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$. Von den isolierten Singularitäten 1, -1, i, $-i$ von F liegen nur -1 und i innerhalb des Kreises. Nach dem Residuensatz ist das Integral gleich

$$2\pi i\Big(\mathrm{res}(F;-1) + \mathrm{res}(F;i)\Big).$$

Da -1 und i Polstellen erster Ordnung sind, gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}(F;-1) &= \lim_{z\to-1}(z+1)F(z) = \lim_{z\to-1}\frac{e^z}{(z-1)(z^2+1)} = -\frac{1}{4e},\\
\mathrm{res}(F;i) &= \lim_{z\to i}(z-i)F(z) = \lim_{z\to i}\frac{e^z}{(z+i)(z^2-1)} = -\frac{e^i}{4i}.
\end{aligned}$$

Also ist das Integral gleich

$$-\frac{\pi i}{2e} - \frac{\pi e^i}{2}.$$

b) Setze $F(z) = \frac{e^{1/(z-3)}}{(z+1)^2}$. Die Kurve ist ein Kreis um 0 mit Radius 2. Da die einzige isolierte Singularität 3 von $e^{1/(z-3)}$ nicht innerhalb des Kreises liegt, ist -1 die einzige isolierte Singularität von F innerhalb des Kreises. Wegen $e^{1/(z-3)}|_{z=-1} \neq 0$ handelt es sich um einen Pol zweiter Ordnung. Nach dem Residuensatz ist das Integral gleich

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{res}(F;-1) &= 2\pi i \frac{d}{dz} e^{1/(z-3)}\Big|_{z=-1} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{-1}{(z-3)^2} e^{1/(z-3)}\Big|_{z=-1} \\ &= -2\pi i \frac{1}{16} e^{-1/4} = -\frac{\pi i}{8} e^{-1/4}. \end{aligned}$$

c) Als Hintereinanderführung holomorpher Funktionen ist die Funktion F auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Sie lässt sich also um $w_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln:

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} w^n.$$

Diese Potenzreihe konvergiert auf der größten Kreisscheibe um $w_0 = 0$, auf der F holomorph ist (vergleiche Formelsammlung, dort für die Laurentreihe formuliert). Hier konvergiert die Potenzreihe also für jedes $w \in \mathbb{C}$.

Der Integrand $zF(\frac{1}{z})$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und für $z \neq 0$, insbesondere also für $0 < |z| < 1$, gilt nach den obigen Überlegungen

$$zF(\frac{1}{z}) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^{1-n}.$$

Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\int_{|z|=1/2} z e^{\sin(1/z)}\, dz = \int_{|z|=1/2} zF(\frac{1}{z})\, dz = 2\pi i \operatorname{res}(zF(\frac{1}{z}); 0),$$

und Ablesen an der Laurentreihe für $zF(\frac{1}{z})$ ergibt

$$= 2\pi i \frac{F''(0)}{2}.$$

Wegen $F'(w) = \cos(w)F(w)$, $F''(w) = -\sin(w)F(w) + \cos^2(w)F(w)$ und $F(0) = 1$ ist $F''(0) = 1$. Das Integral ist also gleich

$$2\pi i \frac{1}{2} = \pi i.$$