A1

a) $f(z) = \dfrac{5z+2i}{z(z+i)} = \dfrac{2}{z} + \dfrac{3}{z+i}$ (PBZ)

1) gesucht Reihe um i, die in $\frac{i}{2}$ konvergiert:
das ist die Potenzreihe mit Konvergenzbereich $\{z \mid |z-i|<1\}$:

$$f(z) = \frac{2}{i+z-i} + \frac{3}{z-i+2i} = \frac{2}{i}\,\frac{1}{1-i(z-i)} + \frac{3}{2i}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}i(z-i)}$$

geom Reihen
$$= \underbrace{\frac{2}{i}\sum_{k=0}^{\infty} i^k (z-i)^k}_{\text{für } |z-i|<1} + \underbrace{\frac{3}{2i}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} i^k (z-i)^k}_{\text{für } |z-i|<2} \Big\} \text{ insgesamt für } |z-i|<1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(2 + \frac{3}{2^{k+1}}\right) i^{k-1} (z-i)^k$$

2) gesucht Reihe um i, die in $-\frac{i}{2}$ konvergiert:
das ist die Darstellung von $f(z)$ in $\{z \mid 1<|z-i|<2\}$:

$$f(z) = \frac{2}{i+z-i} + \frac{3}{z-i+2i}$$

| von oben (1)

$$= \frac{2}{(z-i)}\,\frac{1}{1+\frac{i}{z-i}} + \frac{3}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} i^k (z-i)^k$$

$$= \underbrace{2\sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \frac{1}{(z-i)^{k+1}}}_{\text{für } |z-i|>1} + \underbrace{\frac{3}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} i^k (z-i)^k}_{|z-i|<2}$$

KAI - Klausur März 2012 Lösungen

A1 b) $[0, 1+i]$ bezeichne die Strecke von 0 nach $1+i$.

Nach dem Cauchy Integralsatz gilt, ze^{z^2} für $z \in \mathbb{C}$ holomorph

ist: $\int_\gamma z e^{z^2} dz = \int_{[0,1+i]} z e^{z^2} dz$

Durch $z(t) = t(1+i)$, $0 \le t \le 1$, wird $[0, 1+i]$ parametrisiert:

$$\underline{\int_\gamma z e^{z^2} dz} = (1+i)^2 \int_0^1 t e^{2it^2} dt = \int_0^1 2it e^{2it^2} dt$$

$$= i \int_0^1 e^{2i\tau} d\tau = \underline{\frac{1}{2}(e^{2i} - 1)}$$

Substitution $t \to \tau = t^2$

KAT - Klausur März 2012 Lösungen

A2 Es ist $f(t) = 3h(t) - 3h(t-6)$ $(t>0)$

Man erhält mit der Differentiationsregel und $y(0)=0,\ y'(0)=2$:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3h(t) - 3h(t-6)$$

Transformation des Problems $\circ\!\!-\!\!\bullet$

$$s^2Y(s) - 2 + 5sY(s) + 6Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{3}{s}e^{-6s}$$

$$\Rightarrow \quad (s^2+5s+6)Y(s) = 2 + \frac{3}{s} - \frac{3}{s}e^{-6s}$$

$$(s+3)(s+2)Y(s) = 2 + \frac{3}{s} - \frac{3}{s}e^{-6s}$$

$$\underline{Y(s) = \frac{2}{(s+3)(s+2)} + \frac{3}{s(s+3)(s+2)}\left(1 - e^{-6s}\right)}$$

Das ist die Laplacetransformierte der gesuchten Lösung.

Rücktransformation: (PBZ)

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{(s+3)(s+2)} &= \frac{-2}{s+3} + \frac{2}{s+2}\\ \frac{3}{s(s+3)(s+2)} &= \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{1}{s+3} - \frac{\frac{3}{2}}{s+2}\end{aligned}\right\} + :\ -\frac{1}{s+3} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s}$$

$$\Rightarrow: Y(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t) = \left(\frac{1}{2} - e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)h(t)$$

$$- \left(\frac{1}{2} + e^{-3(t-6)} - \frac{3}{2}e^{-3(t-6)}\right)h(t-6)$$

$$\overset{(t>0)}{=} \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}, & 0 \le t < 6 \\ \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\right) + \left(\frac{3}{2}e^{-2(t-6)} - e^{-3(t-6)}\right), & t \ge 6 \end{cases}$$