Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. D. Hundertmark

Frühjahr 2013
05.03.2013

Bachelor–Modulprüfung
Komplexe Analysis und Integraltransformationen
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 **($5+3+2=10$ Punkte)**

a) Bestimmen Sie mit der Laplacetransformationsmethode die Lösung $y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = te^{2t}, \qquad t \geq 0,$$

die den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1 \quad \text{und} \quad y'(0) = 2$$

genügt.

b) Im folgenden sei jeweils ein System mit Eingang u und Ausgang y gegeben durch die Differentialgleichung $ay''' + by'' + cy' + dy = u$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(i) Es gelte $a = 1$, $b = 4$, $c = 9$ und $d = 10$. Skizzieren Sie das Poldiagramm des Systems.

(ii) Die Sprungantwort des Systems sei gegeben durch

$$h(t) = \Big(\frac{1}{2}e^{2t} - e^t + \frac{1}{2}\Big)\sigma(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die zugehörigen Konstanten a, b, c, d.

c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ -2(t+1)^2\cos(3t) & \text{für } t \in [0, 3\pi) \\ 5e^{-t} & \text{für } t > 3\pi \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung DT_f von T_f.

Lösungsvorschlag

a) Anwendung der Laplacetransformation auf die Gleichung unter Verwendung der Regeln

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\mathscr{L}\{y\}(s) - y(0) \quad \text{und} \quad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0)$$

ergibt

$$(s^2 - 3s + 2)\mathscr{L}\{y\}(s) - s \cdot 1 - 2 + 3 \cdot 1 = \mathscr{L}\{te^{2t}\}(s)$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit genügend großem Realteil. Wegen

$$\mathscr{L}\{te^{2t}\}(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 2$ erhält man

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y\}(s) &= \frac{1}{s^2-3s+2}\Big(s-1+\frac{1}{(s-2)^2}\Big) = \frac{1}{(s-2)(s-1)}\Big(s-1+\frac{1}{(s-2)^2}\Big) \\ &= \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-1)(s-2)^3}.\end{aligned}$$

Der Ansatz

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)^3} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)^3}$$

führt nach Multiplikation mit $s-1$ und $s=1$ gesetzt auf $A=-1$ und nach Multiplikation mit $(s-2)^3$ und $s=2$ gesetzt auf $D=1$. Einsetzen von $s=0$ ergibt $2B-C=3$ und Einsetzen von $s=3$ ergibt $B+C=0$. Wir erhalten so $B=1$ und $C=-1$. Also ist

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{2}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{(s-2)^3} \bullet\!\!-\!\!\circ \Big(-e^t + \Big(2-t+\frac{t^2}{2}\Big)e^{2t}\Big)\sigma(t).$$

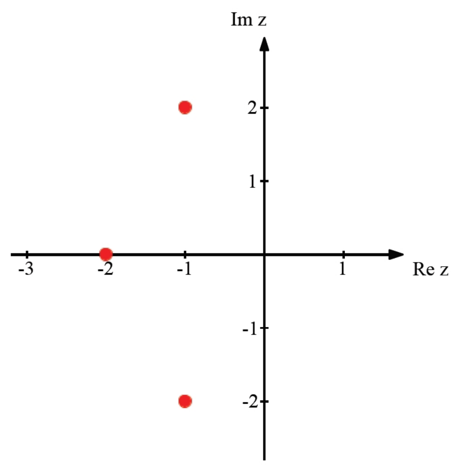
Die Lösung der Differentialgleichung ist also gegeben durch

$$y(t) = -e^t + \Big(2-t+\frac{t^2}{2}\Big)e^{2t}, \quad t \geq 0.$$

b) (i) Das durch $y'''+4y''+9y'+10=u$ beschriebene System hat die Übertragungsfunktion

$$s^3+4s^2+9s+10 = (s+2)(s^2+2s+5) = (s+2)((s+1)^2+4)$$

mit den einfachen Nullstellen -2, $-1+2i$, $-1-2i$.



Poldiagramm des Systems $y'''+4y''+9y'+10=u$

(ii) Die Impulsantwort des Systems lautet hier

$$g(t) = h'(t) = (e^{2t}-e^t)\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s^2-3s+2}.$$

Beachte hierbei, dass die angegebene Sprungantwort h keine Sprungstellen hat (auch nicht bei 0). Die Übertragungsfunktion des Systems ist also $G(s) = \frac{1}{s^2-3s+2}$, und wir lesen ab $a = 0$, $b = 1$, $c = -3$, $d = 2$.

Alternativ kann man feststellen, dass

$$h(t) = \Big(\frac{1}{2}e^{2t} - e^t + \frac{1}{2}\Big)\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2(s-2)} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2s} =: H(s)$$

gilt, und $\frac{G(s)}{s} = H(s)$ ausnutzen. Dann erhält man

$$\begin{aligned} G(s) = sH(s) &= \frac{s}{2(s-2)} - \frac{s}{s-1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{s-2}{2(s-2)} + \frac{2}{2(s-2)} - \frac{s-1}{s-1} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^2-3s+2}. \end{aligned}$$

c) Die Funktion f ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0, 3\pi\}$ und hat Sprungstellen in $0, 3\pi$ mit Sprunghöhen

$$\begin{aligned} f(0+) - f(0-) &= -2(0+1)^2\cos(3\cdot 0) = -2, \\ f(3\pi+) - f(3\pi-) &= 5e^{-3\pi} - (-2(3\pi+1)^2\cos(9\pi)) = 5e^{-3\pi} - 2(3\pi+1)^2. \end{aligned}$$

Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\pi\}$ ist f in t differenzierbar mit

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ -4(t+1)\cos(3t) + 6(t+1)^2\sin(3t) & \text{für } t \in (0, 3\pi) \\ -5e^{-t} & \text{für } t > 3\pi \end{cases}.$$

Definiert man $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $h(t) = f'(t)$ für $t \in \mathbb{R}\backslash\{0, 3\pi\}$ und $h(0)$, $h(3\pi)$ beliebig, so erhält man

$$DT_f = T_h - 2\delta_0 + (5e^{-3\pi} - 2(3\pi+1)^2)\delta_{3\pi}.$$

Aufgabe 2 (4 + 3 + 3 = 10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale, bei denen die Kreislinien jeweils positiv orientiert sind und einmal durchlaufen werden.

a)

$$\int_{|z-2|=2} \frac{3}{(z^2-1)^2}\,dz.$$

b)

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{e^{2z}-1}\,dz.$$

c)

$$\int_{|z-3|=2} z\sin\Big(\frac{1}{z-2}\Big)\,dz.$$

Lösungsvorschlag

a) Setze $F(z) = \frac{3}{(z^2-1)^2}$. Die Kurve ist ein Kreis um 2 mit Radius 2. Es gilt $(z^2-1)^2 = (z-1)^2(z+1)^2$. Von den isolierten Singularitäten 1 und -1 von F, die jeweils Polstellen der Ordnung 2 sind, liegt nur 1 innerhalb des Kreises. Nach dem Residuensatz ist das Integral gleich

$$2\pi i \operatorname{res}(F;1).$$

Da 1 eine Polstelle zweiter Ordnung ist, gilt

$$\operatorname{res}(F;1) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left((z-1)^2 F(z)\right) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{3}{(z+1)^2}\right) = \lim_{z\to 1} -\frac{6}{(z+1)^3} = -\frac{3}{4}.$$

Also ist das Integral gleich

$$-\frac{2\pi i \cdot 3}{4} = -\frac{3\pi i}{2}.$$

b) Setze $F(z) = \frac{1}{e^{2z}-1}$. Die Kurve ist ein Kreis um 0 mit Radius 1. Die isolierten Singularitäten von F sind genau $\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$. Die einzige isolierte Singularität von F, die innerhalb des Kreises liegt, ist 0. Nach dem Residuensatz ist das Integral gleich

$$2\pi i \operatorname{res}(F;0).$$

Es gilt $F(z) = \frac{G(z)}{H(z)}$, wobei $G(z) = 1$ überall holomorph ist mit $G(0) \neq 0$ und $H(z) = e^{2z} - 1$ holomorph ist mit $H'(z) = 2e^{2z}$, $H(0) = 0$, $H'(0) = 2 \neq 0$. Somit hat F in 0 eine Polstelle erster Ordnung, und es gilt

$$\operatorname{res}(F;0) = \frac{G(0)}{H'(0)} = \frac{1}{2}.$$

Also ist das Integral gleich

$$\frac{2\pi i}{2} = \pi i.$$

c) Setze $F(z) = z \sin\left(\frac{1}{z-2}\right)$. Die Kurve ist ein Kreis um 3 mit Radius 2. Die einzige isolierte Singularität 2 von F liegt innerhalb des Kreises. Nach dem Residuensatz ist das Integral gleich

$$2\pi i \operatorname{res}(F;2).$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} F(z) &= (z-2)\sin\left(\frac{1}{z-2}\right) + 2\sin\left(\frac{1}{z-2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-2)^{-2k} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-2)^{-(2k+1)}. \end{aligned}$$

In der ersten Reihe treten nur gerade Exponenten von $z-2$ auf, in der zweiten Reihe tritt der ungerade Exponent -1 von $z-2$ gerade für $k=0$ auf, und wir lesen ab

$$\operatorname{res}(F;2) = 2\frac{(-1)^0}{1!} = 2.$$

Also ist das Integral gleich

$$2\pi i \cdot 2 = 4\pi i.$$