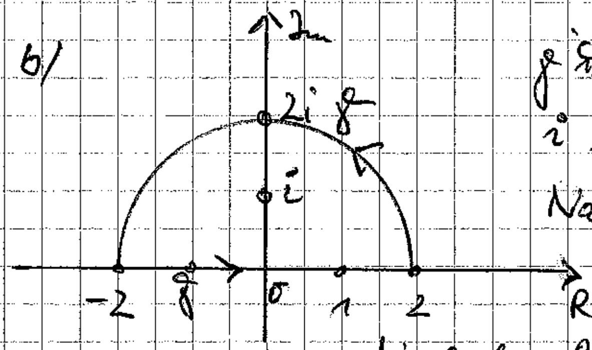
KA I 7.3.2014 Lösungen

Aufgabe 1

1) a) $1-e^{iz} = 1-e^{i(z-i)}e^{-1} = 1-e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}i^k(z-i)^k$

$$= 1-e^{-1} - e^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}i^k(z-i)^k$$

$$\Rightarrow \underline{f(z) = \frac{1-e^{-1}}{z-i} - e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}i^{k+1}(z-i)^k \quad , |z-i|>0}$$

b) 

γ ist der nebenan skizzierte Halbkreis, i liegt innerhalb.

Nach a) gilt $\operatorname{Res}(f(z); i) = 1-\frac{1}{e}$

Nach dem Residuensatz gilt: $\underline{\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)}$

2) a) Die Polstelle $z=0$ ist von 1. Ordnung und liegt im Innern von $|z|=10$. Es ist $\underline{\operatorname{Res}\left(\frac{\sin z}{z^2}; 0\right) = 1}$ wegen $\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \cdots$. Der Residuensatz gibt

$$\underline{\oint_{|z|=10} f(z)\,dz = 2\pi i.}$$

b) Die Polstellen sind $z_{1/2} = \pm e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}$; $|z_{1/2}| = \sqrt{2} > \frac{1}{2}$

$z_{1/2}$ $\underline{\text{liegen außerhalb}}$ von $|z| \le \frac{1}{2}$: $\frac{1}{z^2-2i}$ ist in $\{z \mid |z| < \frac{1}{2}\}$ holomorph. Also (Integralsatz von Cauchy):

$$\underline{\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2-2i}\,dz = 0.}$$

KA1 7.3.2014 Lösungen

Aufgabe 2

a) Wir verwenden die Bezeichnung $y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Y(s)$. Mit

$$y^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^n Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0)$$ erhält man:

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

$$\updownarrow$$

$$Y(s)\underbrace{(s^3 - 6s^2 + 12s - 8)}_{(s-2)^3} = \frac{1}{s-2}$$

(Vorlesung)

Also $Y(s) = \frac{1}{(s-2)^4} \bullet\!\!-\!\!\circ \underline{y(t) = \frac{1}{3!} t^3 e^{2t}}$

b) Wir verwenden:

$$\cos \omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{\omega^2 + s^2}, \quad \sin \omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$$ und dass

aus $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ folgt: $e^{at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s-a)$.

$$(\mathcal{L}(f)(s) =) F(s) = \frac{s+3}{25 + (s-7)^2} = \frac{s-7}{25 + (s-7)^2} + 2\,\frac{5}{25 + (s-7)^2}$$

$$\updownarrow$$

$$\underline{f(t) = e^{7t} \cos 5t + 2e^{7t} \sin 5t}$$