UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Sommersemester 2008
07.06.2008

Diplom–Vorprüfung Integraltransformationen

bzw.

Bachelor-Modulprüfung
Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) **i)** Die Übertragungsfunktion des Systems $y'' + 2y' - 3y = 3u' - u$ lautet

$$G(s) = \frac{\mathscr{L}\{y\}(s)}{\mathscr{L}\{u\}(s)} = \frac{3s-1}{s^2+2s-3} \qquad \text{(für } \operatorname{Re}(s) \text{ hinreichend groß).}$$

ii) Da G die jeweils einfachen Polstellen -3 und 1 besitzt, lautet der Ansatz für die komplexe Partialbruchzerlegung

$$G(s) = \frac{3s-1}{s^2+2s-3} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; Ae^{-3t} + Be^{t} = g(t)\,.$$

1) Da g stückweise stetig und exponentiell beschränkt ist, liefert der Anfangswertsatz

$$\lim_{t\to 0+} g(t) = \lim_{s\to\infty} sG(s) = 3.$$

2) Wegen $B \neq 0$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to\infty} Ae^{-3t} + Be^{t}$ nicht.

b) Die Übertragungsfunktion des Systems $y'' + 4y' + 3y = u' + u$ lautet

$$G(s) = \frac{\mathscr{L}\{y\}(s)}{\mathscr{L}\{u\}(s)} = \frac{s+1}{s^2+4s+3} = \frac{1}{s+3}\,.$$

Da man zur Eingangsgröße $[\sigma]$ die Sprungantwort des Systems erhält, gilt

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = G(s)\cdot\mathscr{L}\{\sigma\}(s) = \frac{1}{s+3}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1/3}{s} - \frac{1/3}{s+3} = \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{3}(1-e^{-3t})\Big\}(s).$$

Die Sprungantwort des Systems ist demnach $\big[\frac{1}{3}(1-e^{-3t})\sigma(t)\big]$.

Da die Impulsantwort des Systems die distributionelle Ableitung der Sprungantwort ist, lautet die Impulsantwort $\big[e^{-3t}\sigma(t)\big]$.

c) Im Fall $b_1 = 0$ und $b_0 \neq 0$ ist die Übertragungsfunktion des Systems $(*)$ gegeben durch

$$G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}\,.$$

Die zugehörige Impulsantwort lautet dann $\mathscr{L}^{-1}\{G\}$.

Die Funktion G besitzt die Polstellen

$$s_{1/2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}.$$

Sind s_1 und s_2 verschieden, so folgt mit komplexer Partialbruchzerlegung

$$G(s) = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} = g(t)$$

für gewisse Koeffizienten $A, B \in \mathbb{C}$. Gilt $s_1 = s_2$, dann ist

$$G(s) = \frac{\widetilde{A}}{s - s_1} + \frac{\widetilde{B}}{(s - s_1)^2} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \widetilde{A}e^{s_1 t} + \widetilde{B}e^{s_1 t}t = g(t)$$

für gewisse Koeffizienten $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathbb{C}$.

Ist $a_1^2 \geqslant 4a_0$ erfüllt, dann sind die beiden Polstellen s_1 und s_2 reell. Damit enthält g in diesem Fall keine Schwingungsterme.

Sind $a_1 < 0$ und $a_1^2 < 4a_0$ erfüllt, dann sind beide Polstellen nichtreell und besitzen beide positiven Realteil. Im übrigen gilt $s_1 = \overline{s_2}$ und damit $A = \overline{B}$. Deshalb ergibt sich eine aufklingende Schwingung.

Sind $a_1 = 0$ und $a_0 > 0$ erfüllt, dann liegen beide Polstellen auf der imaginären Achse. In diesem Fall ergibt sich eine Dauerschwingung mit konstanter Amplitude.

Sind $a_1 > 0$ und $a_1^2 < 4a_0$ erfüllt, dann sind beide Polstellen nichtreell und besitzen beide negativen Realteil. Es ergibt sich abklingende Schwingung.

Zusammenfassend haben wir also

$$\text{A)} \leftrightsquigarrow \text{IV)}, \quad \text{B)} \leftrightsquigarrow \text{II)}, \quad \text{C)} \leftrightsquigarrow \text{III)}, \quad \text{D)} \leftrightsquigarrow \text{I)}.$$

d) Setzt man in

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - y(0) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0)\,.$$

die Anfangswerte $y(0) = 1$ sowie $y'(0) = 4$ ein, so ergibt sich für die Lösung y

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 1 \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - s - 4\,.$$

Daher gilt für hinreichend große $\mathrm{Re}(s)$

$$(s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - s - 4) - 4(s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - 1) + 4\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y\}(s) &= \frac{s}{(s-2)^2} + \frac{2}{(s-2)^5} = \frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s-2)^2} + \frac{2}{4!}\cdot\frac{4!}{(s-2)^5}\\ &= \mathscr{L}\{e^{2t} + 2e^{2t}t + \frac{1}{12}\,e^{2t}t^4\}(s).\end{aligned}$$

Also löst

$$y(t) = e^{2t} + 2e^{2t}t + \frac{1}{12}\,e^{2t}t^4, \qquad t \geqslant 0,$$

die gegebene Differentialgleichung.

Aufgabe 2

a) **i)** Mit Hilfe der Faltungsregel folgt für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \max(\gamma, 0)$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\int_0^t g(r)\,dr\}(s) &= \mathscr{L}\{\int_0^t g(r)\sigma(t-r)\,dr\}(s) = \mathscr{L}\{g * \sigma\}(s)\\ &= \mathscr{L}\{g\}(s) \cdot \mathscr{L}\{\sigma\}(s) = \frac{1}{s}\,\mathscr{L}\{g\}(s)\end{aligned}$$

bzw. äquivalent hierzu

$$s\,\mathscr{L}\{\int_0^t g(r)\,dr\}(s) = \mathscr{L}\{g\}(s).$$

ii) Wir wenden die Laplacetransformation auf die gegebene Gleichung an und erhalten nach Teil i) für hinreichend große $\operatorname{Re}(s)$

$$\mathscr{L}\{y\}(s) + \frac{1}{s}\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{s^3} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}\,.$$

Nach der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

erkennen wir

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \mathscr{L}\{-1 + t + e^{-t}\}(s).$$

Demzufolge leistet

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ -1 + t + e^{-t} & \text{für } t \geqslant 0 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

das Gewünschte.

b) Die Substitution $r := t^2, dr = 2t\,dt$ führt auf

$$\begin{aligned}\int_0^\infty te^{-3t^2}\sin(4t^2)\,dt &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b te^{-3t^2}\sin(4t^2)\,dt = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{b}} e^{-3r}\sin(4r)\,dr\\ &= \frac{1}{2}\,\mathscr{L}\{\sin(4r)\}(3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3^2+4^2} = \frac{2}{25}\,.\end{aligned}$$

c) **i)** Es gilt

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \int_0^1 e^{-st}(t+1)\,dt + \int_1^\infty e^{-st}\cos(t-1)\cosh(2t)\,dt.$$

Hierbei ist der erste Summand für alle $s \in \mathbb{C}$ endlich, während der zweite Summand nur für diejenigen $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 2$ konvergiert. Demnach muss man $\gamma \geqslant 2$ fordern, damit $\mathscr{L}\{f\}(s)$ für alle $\mathrm{Re}(s) > \gamma$ konvergiert. Wähle etwa $\gamma = 2$.
Im folgenden sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 2$. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-st}(t+1)\,dt &= -\frac{1}{s}\,e^{-st}(t+1)\Big|_{t=0}^{1} + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}\,dt\\ &= \frac{1}{s}(1-2e^{-s}) + \frac{1}{s^2}(1-e^{-s}).\end{aligned}$$

Zur Berechnung des zweiten Summanden wenden wir zunächst die Verschiebungsregel an, setzen anschließend die Definition von $\cosh(t)$ ein und benutzen danach die Dämpfungsregel:

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty e^{-st}\cos(t-1)\cosh(2t)\,dt = \mathscr{L}\{\sigma(t-1)\cos(t-1)\cosh(2t)\}(s)\\ &= e^{-s}\mathscr{L}\{\cos(t)\cosh(2(t+1))\}(s)\\ &= \frac{1}{2}\,e^{-s+2}\mathscr{L}\{e^{2t}\cos(t)\}(s) + \frac{1}{2}\,e^{-s-2}\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos(t)\}(s)\\ &= \frac{1}{2}\,e^{-s+2}\,\frac{s-2}{(s-2)^2+1} + \frac{1}{2}\,e^{-s-2}\,\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\,.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s}(1-2e^{-s}) + \frac{1}{s^2}(1-e^{-s}) + \frac{1}{2}\,e^{-s+2}\,\frac{s-2}{(s-2)^2+1} + \frac{1}{2}\,e^{-s-2}\,\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\,.$$

ii) Da f stückweise stetig und von exponentieller Ordnung 2 ist und $f(t) = 0$ für alle $t < 0$ gilt, ist die reguläre Distribution $[f]$ von exponentieller Ordnung 2 mit positivem Täger. Für $\mathrm{Re}(s) > 2$ ergibt sich

$$\mathscr{L}\{D[f]\}(s) = \mathscr{L}\{D[f_+]\}(s) = s\mathscr{L}\{f\}(s)$$

$$= 1 - 2e^{-s} + \frac{1}{s}(1-e^{-s}) + \frac{1}{2}\,e^{-s+2}\,\frac{s^2-2s}{(s-2)^2+1} + \frac{1}{2}\,e^{-s-2}\,\frac{s^2+2s}{(s+2)^2+1}\,.$$

iii) Die distributionelle Ableitung $D[f]$ von f lautet

$$D[f] = [\widetilde{f'}] + \delta_0 + (\cosh(2)-2)\delta_1$$

mit

$$\widetilde{f'}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leqslant 0 \text{ oder } t = 1\\ 1 & \text{für } t \in (0,1)\\ -\sin(t-1)\cosh(2t) + 2\cos(t-1)\sinh(2t) & \text{für } t > 1\end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3

a) **i)** Für jedes $z \neq 2$ gilt

$$\frac{z}{z-2} = \frac{z-2+2}{z-2} = 1 + \frac{2}{z-2}\,.$$

Die Laurententwicklung von F um $z_0 = 2$ konvergiert also für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 2$.

ii) Zunächst formen wir den Ausdruck mittels Partialbruchzerlegung um

$$F(z) = \frac{1}{z(z+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+3}\right).$$

Wegen

$$\frac{1}{z} = \frac{-1}{3-(z+3)} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{z+3}{3}} \overset{|\frac{z+3}{3}|<1}{=} -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z+3}{3}\right)^k = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}(z+3)^k$$

lautet die Laurentreihe von F um $z_0 = -3$

$$F(z) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}(z+3)^k - \frac{1}{z+3}\right) = -\sum_{k=-1}^{\infty} 3^{-(k+2)}(z+3)^k\,.$$

Diese konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |\frac{z+3}{3}| < 1$.

b) **i)** Der Integrand von $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1-\cos(z)}{z}\,dz$ hat in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität, denn

$$\frac{1-\cos(z)}{z} = \frac{1}{z}\left(1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right)\right) = \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \ldots$$

Also ist

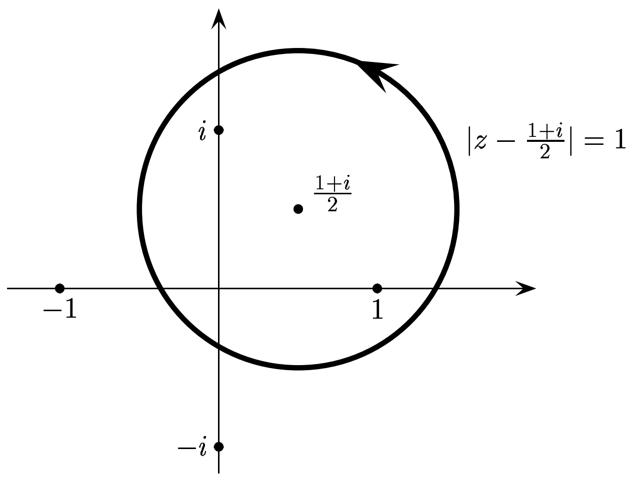
$$\operatorname{res}\left(z \mapsto \frac{1-\cos(z)}{z};\, 0\right) = 0\,,$$

und der Residuensatz liefert

$$\int_{|z|=1} \frac{1-\cos(z)}{z}\,dz = 2\pi i\, \operatorname{res}\left(z \mapsto \frac{1-\cos(z)}{z};\, 0\right) = 0.$$

Alternativ könnte man auch mit dem Cauchyschen Integralsatz argumentieren, weil der Integrand $z \mapsto \frac{1-\cos(z)}{z}$ holomorph auf $\mathbb{C}$ ist.

ii) Wegen $z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$ besitzt der Integrand $F(z) := \frac{3z^2+1}{z^4-1}$ Singularitäten bei ± 1 und $\pm i$ und zwar Polstellen erster Ordnung. Wie man z.B. anhand einer Skizze



erkennt, liegen nur 1 und i innerhalb des Integrationsweges $|z - \frac{1+i}{2}| = 1$. Der Residuensatz liefert daher

$$\int_{|z-\frac{1+i}{2}|=1} F(z)\,dz = 2\pi i\big(\mathrm{res}(F;1) + \mathrm{res}(F;i)\big).$$

Mit

$$\mathrm{res}(F;1) = \frac{(3z^2+1)\big|_{z=1}}{\frac{d}{dz}(z^4-1)\big|_{z=1}} = \frac{3+1}{4} = 1$$

und

$$\mathrm{res}(F;i) = \frac{(3z^2+1)\big|_{z=i}}{\frac{d}{dz}(z^4-1)\big|_{z=i}} = \frac{-3+1}{4i^3} = -\frac{1}{2}\,i$$

erhält man als Ergebnis

$$\int_{|z-\frac{1+i}{2}|=1} F(z)\,dz = \pi i(2-i) = \pi(1+2i).$$

c) Die Funktion

$$\widetilde{F}(s) := \frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s-i)^2(s+i)^2}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$. Für $|s|>1$ gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|\widetilde{F}(s)| = \frac{1}{|s^2+1|^2} \leqslant \frac{1}{(|s|^2-1)^2} \longrightarrow 0 \qquad (|s|\to\infty)\,.$$

Also sind die Voraussetzungen von Hinweis (II) nachgewiesen. Danach gilt für $c>0$ und $t>0$

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iA}^{c+iA} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds = \mathrm{res}(s\mapsto e^{st}\widetilde{F}(s);i) + \mathrm{res}(s\mapsto e^{st}\widetilde{F}(s);-i).$$

bzw. nach der komplexen Umkehrformel

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}(t) = \mathrm{res}(s\mapsto e^{st}\widetilde{F}(s);i) + \mathrm{res}(s\mapsto e^{st}\widetilde{F}(s);-i).$$

Da sowohl i als auch $-i$ Polstellen zweiter Ordnung von $s\mapsto e^{st}\widetilde{F}(s)$ sind, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}(s\mapsto e^{st}\widetilde{F}(s);i) &= \frac{d}{ds}\left((s-i)^2\,\frac{e^{st}}{(s-i)^2(s+i)^2}\right)\Bigg|_{s=i} = \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{st}}{(s+i)^2}\right)\Bigg|_{s=i}\\
&= \left(\frac{te^{st}(s+i)^2 - 2e^{st}(s+i)}{(s+i)^4}\right)\Bigg|_{s=i} = \left(\frac{te^{st}(s+i) - 2e^{st}}{(s+i)^3}\right)\Bigg|_{s=i}\\
&= \frac{2ite^{it} - 2e^{it}}{8i^3} = \frac{-te^{it} - ie^{it}}{4}
\end{aligned}$$

und

$$\mathrm{res}(s\mapsto e^{st}\widetilde{F}(s);-i) = \left(\frac{te^{st}(s-i) - 2e^{st}}{(s-i)^3}\right)\Bigg|_{s=-i} = \frac{-te^{-it} + ie^{-it}}{4}$$

Hiermit ist

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}(t) &= \frac{-te^{it} - ie^{it}}{4} + \frac{-te^{-it} + ie^{-it}}{4} = \frac{1}{2}\left(-t\,\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} - i\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\big(-t\cos(t) + \sin(t)\big).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Da die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gerade ist, gilt für jedes $\omega\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t} f(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt \\ &\overset{t=-r}{=} \int_0^\infty e^{i\omega r}\underbrace{f(-r)}_{=f(r)}\,dr + \int_0^\infty e^{-i\omega t} f(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty (e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}) f(t)\,dt = 2\int_0^\infty \cos(\omega t) f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Diese Rechnung zeigt insbesondere $\mathscr{F}f(\omega)\in\mathbb{R}$.

b) Da die gegebene Funktion f gerade ist, gilt nach dem a)-Teil

$$\mathscr{F}f(\omega) = 2\int_0^\infty \cos(\omega t) f(t)\,dt = 2\int_0^1 \cos(\omega t)\,dt, \qquad \omega\in\mathbb{R}.$$

Für $\omega\neq 0$ ist

$$\mathscr{F}f(\omega) = 2\int_0^1 \cos(\omega t)\,dt = 2\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\Big|_{t=0}^{1} = 2\,\frac{\sin(\omega)}{\omega}.$$

Im Fall $\omega=0$ ergibt sich

$$\mathscr{F}f(0) = 2\int_0^1 1\,dt = 2.$$

Insgesamt gilt also für alle $\omega\in\mathbb{R}$

$$\mathscr{F}f(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sin(\omega)}{\omega} & \text{für } \omega\neq 0 \\ 2 & \text{für } \omega = 0\end{cases}.$$

c) Ist f wie im b)-Teil definiert, so gilt $g(t)=f(t-1)$ für alle $t\in\mathbb{R}$. Daher liefert die Verschiebungsregel der Fouriertransformation

$$\mathscr{F}g(\omega) = e^{-i\omega}\mathscr{F}f(\omega), \qquad \omega\in\mathbb{R}.$$

Mit Hilfe der Faltungsregel ergibt sich daher

$$\mathscr{F}(g*g)(\omega) = \mathscr{F}(g)(\omega)\cdot\mathscr{F}(g)(\omega) = e^{-2i\omega}\big(\mathscr{F}f(\omega)\big)^2 \overset{\text{b)}}{=} \begin{cases} 4e^{-2i\omega}\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} & \text{für } \omega\neq 0 \\ 4e^{-2i\omega} & \text{für } \omega=0\end{cases}.$$

Ist

$$h(t) := \begin{cases} 1-|t| & \text{für } t\in[-1,1] \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

gesetzt, dann gilt laut Hinweis

$$\mathscr{F}h(\omega) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2} & \text{für } \omega\neq 0 \\ 1 & \text{für } \omega=0\end{cases} \qquad (\omega\in\mathbb{R}).$$

Demnach ist für jedes $\omega\in\mathbb{R}$

$$\mathscr{F}(g*g)(\omega) = 4e^{-2i\omega}\mathscr{F}h(2\omega),$$

woraus mit den Eigenschaften der Fouriertransformation

$$\mathscr{F}(g*g)(\omega) = 4e^{-2i\omega}\mathscr{F}h(2\omega) = 4\mathscr{F}\big(t\mapsto h(t-2)\big)(2\omega) = 2\mathscr{F}\big(t\mapsto h(t/2-1)\big)(\omega)$$

folgt. Damit ergibt sich für jedes $t \in \mathbb{R}$ nach der Fourierinversionsformel (deren Voraussetzungen erfüllt sind: $g * g$ ist stetig und absolut integrierbar, ferner ist $\mathscr{F}(g * g)$ absolut integrierbar.)

$$\begin{aligned}(g * g)(t) = 2h(t/2 - 1) &= \begin{cases} 2(1 - |t/2 - 1|) & \text{für } t/2 - 1 \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2 - |t - 2| & \text{für } t \in [0, 4] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .\end{aligned}$$

d) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |h'(t)|\, dt < \infty$ und $\int_{-\infty}^{\infty} |h''(t)|\, dt < \infty$. Wir zeigen

$$(1 + \omega^2)\, |\mathscr{F} h(\omega)| \leqslant C \qquad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}$$

mit einer von ω unabhängigen Konstanten C. Dazu bemerken wir zunächst

$$\mathscr{F}(h'')(\omega) = (i\omega)^2 \mathscr{F} h(\omega) = -\omega^2 \mathscr{F} h(\omega)\,, \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

woraus

$$|\mathscr{F}(h'')(\omega)| = \omega^2 |\mathscr{F} h(\omega)|\,, \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

folgt. Hiermit erhalten wir für jedes $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(1 + \omega^2)|\mathscr{F}(h)(\omega)| &= |\mathscr{F}(h)(\omega)| + \omega^2 |\mathscr{F}(h)(\omega)| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\omega t} h(t)|\, dt + |\mathscr{F}(h'')(\omega)| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} |h''(t)|\, dt =: C < \infty\end{aligned}$$

und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F} h(\omega)|\, d\omega \leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2}\, d\omega < \infty.$$