Lösungen KAI Sept 2010

**A1a)** $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^3 \cos z}$ hat innerhalb von $\gamma$

die Polstellen $z=0$ und $z=\frac{\pi}{2}$. Beide Polstellen sind von 1. Ordnung. Somit erhält man:

$$\operatorname{Res}(f; \tfrac{\pi}{2}) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{(z-\frac{\pi}{2})}{\cos z} \cdot \frac{\sin^2 z}{z^3} = -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} \quad \frac{\sin^2\frac{\pi}{2}}{(\frac{\pi}{2})^3} = -\frac{8}{\pi^3}$$

$$\operatorname{Res}(f; 0) = \lim_{z\to 0} \frac{z \sin^2 z}{z^3 \cos z} = 1$$

Mit dem Residuensatz erhält man: $\displaystyle\int_\gamma f(\xi)\,d\xi = 2\pi i\left(1 - \frac{8}{\pi^3}\right)$

---

**A1b)** i) Es gibt holomorphe Funktionen $f$ mit $\operatorname{Im}(f) = v$ und $v \in C^2$, falls $\Delta v(x,y) = 0$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, erfüllt ist.

ii) $v(x,y) = 2xy + x$ erfüllt diese Bedingung. Es ist mit $f = u + iv$ $u$ mit $D_1 u(x,y) = D_2 v(x,y) = 2x$ (1)

und $D_2 u(x,y) = -D_1 v(x,y) = -2y-1$ (2)

gesucht.

$$(1) \Rightarrow u(x,y) = x^2 + \varphi(y) \Rightarrow D_2 u(x,y) = \varphi'(y) \overset{(2)}{=} -2y-1$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = -y^2 - y + c \quad (c \in \mathbb{R}, \text{konst})$$

oder: $u(x,y) = x^2 - y^2 - y + c$

$$\Rightarrow f(x+iy) = x^2 - y^2 - y + c + i\,2xy + ix \quad (c\in\mathbb{R}, \text{konst})$$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 + iz + c \quad (c \in \mathbb{R}, \text{konst})$$

KA I

A2a) Wende $\mathcal{L}$ auf $y(t) = t - e^{t}\int_0^t y(u)e^{-u}\,du$ $(t \geq 0)$

$= t - (y * \exp)(t)$ an.

Mit $Y(s) := \mathcal{L}(y)(s)$ und dem Faltungssatz erhält man:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - Y(s)\frac{1}{s-1} \quad \text{mit } t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$$

$$e^t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-1}.$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} \bullet\!\!-\!\!\circ \underline{y(t) = t - \frac{1}{2}t^2} \quad (t \geq 0)$$

$$\text{mit } \frac{1}{s^n} \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}h(t).$$

A2b) Partialbruchzerlegung für $\underline{Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2}}$

$$\Rightarrow (*) \quad s+1 = A_1(s+2)^2 + B_1 s(s+2) + B_2 s$$

Setze in $(*)$ $s=0 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4}$, $s=-2 \Rightarrow B_2 = \frac{1}{2}$

Differenziere $(*)$ nach $s$ und setze $s=-2 \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{4}$

also: $\underline{Y(s) = \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)^2}}$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\underline{y(t) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t}\right)h(t)}$$

mit $\frac{A_k}{(s+a)^k} \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{A_k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-at}h(t)$