Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Herbst 2015
18.09.2015

Modulprüfung / Bachelor

Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Annahme: Es gibt eine 2π-periodische, stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit den Fourierkoeffizienten $c_k = 0, k \leqslant 1, c_k = \frac{1}{k^{\frac{1}{4}}}, k \geqslant 2$ ($k \in \mathbb{N}$). Die Parsevalsche Gleichung besagt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=2}^{\infty} |k^{-\frac{1}{4}}|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Dies ist ein Widerspruch, weil die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} |k|^{-\frac{1}{2}}$ nicht konvergent ist!

b) Es gilt

$$\mathcal{F}\{e^{-|t|} \cos \beta t\}(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{-|t|+i\beta t} + e^{-|t|-i\beta t}\}(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{-|t|}\}(\omega-\beta) + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{-|t|}\}(\omega+\beta) =$$

$$\frac{1}{1+(\omega-\beta)^2} + \frac{1}{1+(\omega+\beta)^2}\,.$$

c) Wir verwenden den Satz von Plancherel: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, absolut integrierbar und gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty$, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\{f(\omega)\}|^2 \, d\omega\,.$$

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(t) = e^{-|t|}$ erfüllt die Bedingungen des Satzes von Plancherel und nach dem Hinweis gilt $\mathcal{F}\{f\} = \frac{2}{1+\omega^2}$. Daraus folgt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2} \, d\omega = \frac{1}{4} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|} \, dt = \pi \int_{0}^{\infty} e^{-2t} \, dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 2

a) Anwendung der Laplacetransformation auf die Gleichung unter Verwendung der Regeln

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - y(0) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0)$$

ergibt

$$s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - 1 + 2\mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{\sin 3t\}(s) = \frac{3}{s^2+9}\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{1}{s^2+2}\left(\frac{3}{s^2+9}+1\right) = \frac{1}{s^2+2} + \frac{3}{(s^2+2)(s^2+9)} =$$

$$\frac{1}{s^2+2} + \frac{3}{7}\frac{1}{s^2+2} - \frac{3}{7}\frac{1}{s^2+9} = \frac{10}{7}\frac{1}{s^2+2} - \frac{3}{7}\frac{1}{s^2+9}$$

gilt. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(t) = \frac{10}{7\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t - \frac{1}{7}\sin 3t\,.$$

b) **i)** Der Integrand besitzt in 1 eine einfache Polstelle. Es gilt

$$\int_{|z-2|=2} \frac{\sin^2 z}{(z-1)}\,dz = 2\pi i \mathrm{res}(F;1) = 2\pi i \sin^2(1)\,.$$

ii) Der Integrand $F(z) := \frac{1}{(z+1)^3(z-4)^2}$ besitzt in -1 eine dreifache und in 4 eine doppelte Polstelle und ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{-1,4\}$.

Da innerhalb des Integrationsweges $|z-5|=2$ nur die Polstelle 4 liegt, liefert der Residuensatz

$$\int_{|z-5|=2} F(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{res}(F;4) = -\frac{6}{625}\pi i\,,$$

denn für das Residuum von F in 4 gilt

$$\mathrm{res}(F;2) = \left(\frac{d}{dz}(z-4)^2F(z)\right)\Big|_{z=4} = \left(\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+1)^3}\right)\Big|_{z=4} = -\frac{3}{(z+1)^4}\Big|_{z=4} = -\frac{3}{625}\,.$$

c) Mit $\mathrm{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\,\mathrm{Arg}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\pi/4$ ergibt sich

$$z = (1+i)^{3i} = e^{3i\,\mathrm{Log}\,(1+i)} = e^{3i\ln\sqrt{2}-\frac{3}{4}\pi} = e^{-\frac{3}{4}\pi}(\cos(3\ln\sqrt{2}) + i\sin(3\ln\sqrt{2}))\,.$$

Die Antwort lautet

$$\mathrm{Re}\,z = e^{-\frac{3}{4}\pi}\cos(3\ln\sqrt{2})\,,\quad \mathrm{Im}\,z = e^{-\frac{3}{4}\pi}\sin(3\ln\sqrt{2})\,.$$