ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
MATHEMATISCHE FAKULTÄT

Biharmonischer Wärmefluß

Diplomarbeit

vorgelegt von Tobias Lamm

betreut durch Prof. Dr. Ernst Kuwert

Dezember 2001
(korrigierte Version Mai 2002)

Erklärung

Ich erklï£¡re, dass ich diese Arbeit selbstï£¡ndig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und dass alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Freiburg, den

Tobias Lamm

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Untersuchung biharmonischer Abbildungen bzw. deren Wärmefluß ist einerseits aufgrund der Struktur der Gleichung, die die Abbildungen lösen, von eigenständigem Interesse andererseits soll deren Untersuchung zur Erkenntnisgewinnung bei harmonischen Abbildungen ([EL83]) beitragen. Diese zählten in den letzten 40 Jahren zu den wichtigsten Forschungsgebieten im Bereich der geometrischen Analysis. Um einen Einblick in dieses große Gebiet zu erhalten, werden hier die Arbeiten von Eells und Lemaire [EL78], [EL88] empfohlen.
Harmonische Abbildungen zwischen zwei kompakten, glatten Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M^m, g) und (N^n, h) sind Abbildungen $u \in C^\infty(M, N)$, welche die Gleichung

(1) $\Delta u = 0$

auf M erfüllen, wobei Δ den intrinsischen Laplaceoperator bezeichnet. Genauer gilt $\Delta u = -\nabla_{e_i} Du(e_i)$, wobei $\{e_i\}$ ein Orthonormalbasisfeld von M und ∇ die kovariante Ableitung von N bezeichnet (siehe Kapitel 3.1). Die Gleichung (1) ist die Euler-Lagrange Gleichung der Dirichletenergie $E_1(u)$ mit

$$E_1(u) := \frac{1}{2} \int_M |Du|^2 dv_g.$$

Harmonische Abbildungen sind also kritische Punkte der Dirichletenergie. Nach einem bekannten Satz von Nash-Moser kann jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit isometrisch in einen $\mathbb{R}^k$ eingebettet werden, und man erhält die zu (1) äquivalente Gleichung

(2) $\Delta_g u + A(u)(Du, Du) = 0,$

wobei Δ_g den Laplace-Beltrami Operator von (M, g) und A die zweite Fundamentalform der Einbettung $N \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ bezeichnen.

Ein zentrales Problem auf dem Gebiet der harmonischen Abbildungen stellt die Frage nach deren Existenz dar. Zur Beantwortung gibt es zwei unterschiedliche Ansätze:

Sacks und Uhlenbeck [SU81] betrachten ein modifiziertes Funktional

$$E_1^\alpha(u) := \frac{1}{2} \int_M (1 + |Du|^2)^\alpha dv_g$$

für $\alpha > 1$ und beweisen damit im Fall einer zweidimensionalen Ausgangsmannigfaltigkeit M die Existenz einer minimierenden harmonischen Abbildung in jeder Homotopieklasse von Abbildungen in $C^0(M, N)$, falls $\pi_2(N) = 0$ gilt.

Außerdem kann durch den negativen Gardientenfluß (oder Wärmefluß) von $E_1(u)$ eine gegebene Abbildung $u_0 \in C^\infty(M, N)$ in eine harmonische Abbildung deformiert werden und zwar folgendermaßen:
Falls $N \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ isometrisch eingebettet ist, sieht das dazugehörige parabolische Differentialgleichungssytem wie folgt aus:

$$\text{(3)}\quad \partial_t u = -\Delta_g u - A(u)(Du, Du)$$
$$u(\cdot, 0) = u_0.$$

Im Fall nichtpositiver Schnittkrümmung von N haben Eells und Sampson [ES64] ergänzt durch Hartmann [Har67] bewiesen, daß eine eindeutige und für alle $t > 0$ glatte Lösung des Flusses existiert, falls der Anfangswert u_0 in $C^1(M, N)$ liegt. Außerdem zeigten sie, daß der Fluß gleichmäßig in C^k für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gegen eine zu u_0 homotope harmonische Abbildung konvergiert.
Im subkritischen Fall ($\dim M = 1$) sind keine Krümmungsvoraussetzungen notwendig. Allerdings kann die Gleichmäßigkeit der Konvergenz verloren gehen. Es existiert zu jedem Anfangswert $u_0 \in C^1(M, N)$ eine eindeutige Lösung $u \in C^\infty(M \times [0, \infty), N)$ des harmonischen Wärmeflusses und eine Folge von Zeiten $t_i \to \infty$, so daß $u(t_i)$ in $C^{1,\alpha}$ für alle $\alpha < \frac{1}{2}$ gegen u_∞ konvergiert. u_∞ ist eine proportional zur Bogenlänge parametrisierte Geodätische (siehe z.B. [Ott85], [Top96]).
Da es Beispiele von Homotopieklassen gibt, die keinen harmonischen Repräsentanten besitzen (nach Eells und Wood [EW76] existiert keine harmonische Abbildung $u \in C^1(T^2, S^2)$ mit Abbildungsgrad eins), muß der harmonische Wärmefluß im kritischen Fall ($\dim M = 2$) nicht für alle Zeiten glatt bleiben, sondern kann Singularitäten entwickeln.
Tatsächlich hat Struwe [Str85] gezeigt, daß im Fall $\dim M = 2$ für alle $u_0 \in H^{1,2}(M, N)$ eine Distributionslösung $u : M \times \mathbb{R}_+ \to N$ des harmonischen Wärmeflusses existiert, welche bis auf endlich viele Singularitäten glatt ist. Zusätzlich konvergiert für $t_m \to \infty$ geeignet die Folge von Abbildungen $u(\cdot, t_m)$ schwach in $H^{1,2}(M, N)$ gegen eine glatte harmonische Abbildung $u_\infty : M \to N$. Entfernt von endlich vielen Punkten konvergiert die Folge sogar in C^k für alle $k \geq 0$.
Später wurde von Chang, Ding und Ye [CDY92] ein explizites Beispiel eines harmonischen Wärmeflusses von S^2 nach S^2 konstruiert, welcher in endlicher Zeit eine Singularität entwickelt.

Nun zu den biharmonischen Abbildungen. Sie sind definiert als kritische Punkte der Bi-Energie $E_2(u)$, wobei
$$E_2(u) := \frac{1}{2} \int_M |\Delta u|^2 dv_g = \frac{1}{2} \int_M |\nabla_{e_i} Du(e_i)|^2 dv_g.$$
Jiang [Jia86b] hat die Euler-Lagrange Gleichung von $E_2(u)$ berechnet:

$$\text{(4)}\quad \Delta^2 u + R^N(Du(e_i), \Delta u)Du(e_i) = 0,$$

wobei R^N den Krümmungstensor von N bezeichnet.
Diese Gleichung zeigt, daß jede harmonische Abbildung eine biharmonische Abbildung ist.

Umgekehrt hat Jiang [Jia86b] bewiesen, daß im Fall nichtpositiver Schnittkrümmung von N jede biharmonische Abbildung auch harmonisch ist (siehe Satz (3.1.6)).

Analog zu den harmonischen Abbildungen stellt sich bei biharmonischen Abbildungen die Frage nach deren Existenz. Mou [Mou00] hat mit Hilfe der direkten Methode der Variationsrechnung gezeigt, daß im Fall $\dim M = 1$ biharmonische Kurven zu vorgegebenen Dirichletrandwerten existieren. Caddeo, Montaldo und Oniciuc [CMO01], [CMO02], [Oni] haben in ihren Arbeiten Resultate über die Nichtexistenz nichtharmonischer biharmonischer Abbildungen erzielt. In dieser Arbeit soll die Existenzfrage durch den zur Bi-Energie gehörenden negativen Gradientenfluß betrachtet werden. Das zugehörige Differentialgleichungssytem sieht wie folgt aus:

$$(5)\quad \partial_t u = -\Delta^2 u - R^N(Du(e_i), \Delta u)Du(e_i)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0$$

(5) ist ein parabolisches System vierter Ordnung, wohingegen (3) lediglich von zweiter Ordnung ist. Daraus folgt, daß im Fall des biharmonischen Wärmeflusses kein Maximumprinzip mehr zur Verfügung steht, welches im Fall des harmonischen Wärmeflusses von großer Bedeutung war (siehe [ES64]) und somit andere Methoden zur Gewinnung von a-priori Abschätzungen gewählt werden müssen. Analog zu Struwes Vorgehen bei dem harmonischen Wärmefluß [Str85] und Yang-Mills Fluß [Str94] wird deshalb in Kapitel 3.2 mit L^2-Abschätzungen gearbeitet (vgl. [KS02], [KS01]).

Ein Problem, das sich bei weiterer Betrachtung stellt, ist der Beweis der Kurzzeitexistenz einer Lösung von (5). In Kapitel 2 wird die Kurzzeitexistenz für Lösungen $u : M \to \mathbb{R}^N$ von quasilinearen parabolischen Differentialgleichungssystemen gerader Ordnung mit Cauchy- und Dirichletranddaten in Hölderräumen bewiesen. Polden [Pol96] hat zwar die Kurzzeitexistenz für Lösungen einer quasilinearen parabolischen Gleichung ohne Ortsranddaten in Sobolevräumen nachgewiesen, da es in der Regel nicht möglich ist, das durch das Problem gegebene Differentialgleichungssytem auf eine skalare Gleichung zu reduzieren, ist es von Nutzen die Kurzzeitexistenz für Systeme bereitzustellen. Die hier betrachten parabolischen Systeme bilden auch für den Fall $N = 1$ eine Verallgemeinerung von Poldens Betrachtungen (siehe Kapitel 2.1). Ziel des zweiten Kapitels ist eine möglichst vollständige Darstellung des Beweises der Kurzzeitexistenz.

Dazu werden in Kapitel 2.1 stark elliptische Systeme und das zugehörige Dirichletproblem eingeführt. Mit Hilfe der Gårdingschen Ungleichung (Satz (2.1.6)) werden innere L^2- Abschätzungen (Satz (2.1.7)) und Randabschätzungen (Satz (2.1.10)) bewiesen, die durch ein Überdeckungsargument zu globalen Abschätzungen zusammengefaßt werden (Satz (2.1.12)). Die L^2-Abschätzungen für stark elliptische Systeme wurden unter anderem schon von Nirenberg [Nir55] betrachtet (vgl. [Fri69]). Die in dieser Arbeit gewählte Beweismethode orientiert sich an dem Fall einer skalaren Gleichung zweiter Ordnung (siehe z.B. [Kuw98], [GT01]).
Das in Kapitel 2.1 betrachtete elliptische Randwertproblem ist nicht das Allgemeinste für das man L^2-Abschätzungen zeigen kann. Zugunsten der Einfachheit der Darstellung wird aber in dieser Arbeit darauf verzichtet den allgemeinsten Fall zu präsentieren. Viele aus geometrischen Variationsproblemen entstehende parabolische Systeme haben die in dieser Arbeit betrachtete Form, wie man an den Beispielen des harmonischen und biharmonischen Wärmeflusses sieht.

Für die elliptische Regularitätstheorie der allgemeineren Systeme sei hier verwiesen auf die Arbeiten von Agmon, Douglis und Nirenberg [ADN59], [ADN64] sowie das Buch von Morrey [Mor66].

In Kapitel 2.2 werden die zu dem elliptischen Problem gehörenden parabolischen L^2- Abschätzungen bewiesen. Zunächst wird die Regularität für das Problem mit Cauchy- und Dirichletranddaten gezeigt (Satz (2.2.2)). Dazu müssen gewisse Kompatibilitätsbedingungen an die Randdaten und die rechte Seite der Gleichung gestellt werden, um die gewünschte Regularität der Lösung zu erhalten. Danach werden die Abschätzungen sowohl in der Zeit, im Ort als auch in Ort und Zeit lokalisiert (Sätze (2.2.3), (2.2.5) und (2.2.6)).
L^2-Abschätzungen für lineare parabolische Systeme sind Standard. Für eine skalare Gleichung zweiter Ordnung sei hier verwiesen auf das Buch von Evans [Eva98]. Wloka [Wlo82] hat im Fall einer skalaren Gleichung Abschätzungen für allgemeine parabolische Randwertprobleme behandelt. Als Referenzen für parabolische Systeme seien hier die Arbeiten von Ejdel'man [Ejd69], [Ejd94] angeführt.

Die Schauderabschätzungen für das lineare parabolische Differentialgleichungssystem folgen in Kapitel 2.3. Wie die L^2-Abschätzungen gelten auch sie für parabolische Systeme als Standard. Die in dieser Arbeit verwendete Beweismethode ist relativ neu und stammt von Simon [Sim97]. Er hat für eine sehr allgemeine Klasse von Differentialoperatoren (sogenannte "scale-elliptic" Operatoren) und Randwerten Schauderabschätzungen bewiesen. Sein Beweis beruht auf einer trickreichen Skalierungstechnik. In Kapitel 2.3 werden zuerst Schauderabschätzungen für verschiedene Randwerte gezeigt, die danach, analog zu den elliptischen L^2-Abschätzungen, durch ein Überdeckungsargument zusammengefaßt werden (Satz (2.3.23)). Am Ende dieses Abschnitts werden die erzielten Resultate durch Einführung von lokalen Koordinaten auf Abbildungen $u : M \to \mathbb{R}^N$ übertragen (Satz (2.3.24)), wobei (M, g) eine glatte, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

In Kapitel 2.4 wird die Existenz einer Lösung des linearen Problems nachgewiesen (Satz (2.4.3)), so daß danach der Beweis für die Kurzzeitexistenz (Satz (2.4.5)) einer Lösung des quasilinearen parabolischen Differentialgleichungssystems gerader Ordnung mit Cauchy- und Dirichletrandaten unter geeigneten Voraussetzungen geführt werden kann.

Da nun die Kurzzeitexistenz für Lösungen des biharmonischen Wärmeflusses zur Verfügung steht (vgl. Satz (3.3.1)) wird im dritten Kapitel die Langzeitexistenz und Subkonvergenz in den subkritischen Fällen ($\dim M \in \{1, 2, 3\}$) untersucht, wobei hier zur Vereinfachung glatte Anfangswerte u_0 vorausgesetzt werden.

In Kapitel 3.1 wird dazu die Euler-Lagrange Gleichung der Bi-Energie bestimmt (Satz (3.1.4)). Danach wird die Evolution von $E_1(u)$ und $E_2(u)$ unter dem biharmonischen Wärmefluß berechnet. Dabei stellt sich sich heraus, daß im Fall nichtpositiver Schnittkrümmung von N nicht nur die Bi-Energie, sondern auch die Dirichletenergie unter dem Fluß abfällt (siehe Lemma (3.1.7) und (3.1.8)). Zusätzlich werden in Kapitel 3.1 einige Kommutatorformeln bereitgestellt, welche später unter anderem dazu verwendet werden, Abschätzungen an die volle vierte kovariante Ableitung einer Lösung des Flusses aus Abschätzungen an Δ^2 herzuleiten.

Die sogenannten Energieabschätzungen werden in Kapitel 3.2 bewiesen. Dabei handelt es sich um Abschätzungen von Ableitungen der Lösungen des biharmonischen Wärmeflusses in der L^2-Norm. Sie dienen dazu, die $W^{4,2}$-Norm lokal in der Zeit zu beschränken, um den Sobolevschen Einbettungssatz anzuwenden und die $C^{2,\alpha}$-Norm von Lösungen für alle $\alpha < \frac{1}{2}$ lokal in der Zeit zu beschränken. Unter Verwendung dieser Abschätzung ist die klassische Schaudertheorie anwendbar, und man erhält die höhere Regularität von Lösungen (Satz (3.2.23)). Das wichtigste Hilfsmittel im Beweis dieser Abschätzungen ist wie bei Råde [Råd92] im subkritischen Fall des Yang-Mills Flusses die Sobolevungleichung für Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ mit $\dim M \in \{1, 2, 3\}$:

$$||f||_{L^6} \leq c||f||_{W^{1,2}}$$

Allerdings wird die Beschränktheit der vollen zweiten kovarianten Ableitung der Lösungen benötigt. Im Fall nichtpositiver Schnittkrümmung von N erhält man sie direkt aus der Evolutionsgleichung für $E_2(u)$ (Lemma (3.2.2)). Dagegen ist in den anderen Fällen für alle Lösungen u des Flusses für alle $t > 0$ die Zusatzbedingung

$$||Du(\cdot, t)||_{L^4} \leq c$$

erforderlich. Eine Ausnahme bildet der Fall $\dim M = 1$. Hier sind mit $E_2(u)$ direkt die vollen zweiten kovarianten Ableitungen von u beschränkt.

In Kapitel 3.3 werden die in Kapitel 3.2 erhaltenen Energieabschätzungen benutzt, um die Langzeitexistenz und Subkonvergenz gegen eine biharmonische Abbildung des Flusses im subkritischen Fall unter den obigen Voraussetzungen zu beweisen. Aufgrund der bereits erwähnten Tatsache, daß im Fall nichtpositiver Schnittkrümmung von N jede biharmonische Abbildung automatisch harmonisch ist, konvergiert der Fluß in diesem Fall gegen eine harmonische Abbildung.

Danksagung

Ich bedanke mich bei Prof. Dr. Ernst Kuwert für die Vergabe dieses interessanten Themas, die stets hilfsbereite Betreuung der Arbeit und für die vielen Anregungen und Ideen, die sich in dieser Arbeit und in meinem Interesse an der Mathematik wiederspiegeln. Ferner danke ich Dr. Thomas Müller und Dr. Miles Simon für hilfreiche Diskussionen, Stefanie Mayer für das sorgfältige und oftmals nervenaufreibende Korrekturlesen des Textes und schließlich bedanke ich mich bei meinen Eltern für ihre großzügige finanzielle Unterstützung, welche mir dieses Studium erst ermöglicht hat.

Kapitel 2

Kurzzeitexistenz

2.1 Elliptische L^2-Abschätzungen

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und regulär. Betrachte auf G den linearen Differentialoperator

$$L = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a^\alpha D_\alpha,$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $D_\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$ und $a^\alpha(x) = (a^\alpha_{jk}(x))_{1\leq j,k\leq N}$ mit $a^\alpha_{jk}(x) \in \mathbb{R} \ \ \forall \ \ 1\leq j, k\leq N$.
Man beschränkt sich hier auf den Fall $a^\alpha \in C^\infty(\overline{G}, \mathbb{R}^{N^2})$ und $\sup_{x\in\overline{G}} |D_\beta a^\alpha(x)| \leq M \ \forall \ \ |\alpha| \leq 2m, \forall \ \ |\beta| \geq 0$, da die Resultate später nur im Fall konstanter Koeffizienten angewendet werden sollen.

Definition 2.1.1 (Stark elliptische Operatoren)**.** *Ein Differentialoperator L der Ordnung $2m$ heißt stark elliptisch genau dann, wenn ein $\lambda > 0$ existiert, so daß gilt:*

$$\sum_{|\alpha|=2m} a^\alpha_{jk}(x)\xi_\alpha \eta^j \eta^k \geq \lambda|\xi|^{2m}|\eta|^2 \qquad \forall \ \ x \in G, \ \ \forall \ \xi \in \mathbb{R}^n, \ \ \forall \ \eta \in \mathbb{R}^N$$

Bemerkung 2.1.2. *Jedem Differentialoperator L kann sein Symbol σ zugeordnet werden, wobei σ definiert ist durch:*

$$\sigma(L, x, \xi) := \sum_{|\alpha|=2m} a^\alpha(x)\xi_\alpha \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \quad \textit{für} \ \ x \in G, \ \ \xi \in \mathbb{R}^n$$

Damit können nun stark elliptische Differentialoperatoren in $x \in \mathbb{R}^n$ durch folgende Forderung definiert werden:

$$\frac{1}{2}(\sigma(L, x, \xi) + \sigma^T(L, x, \xi)) \ \ ist \ \ positiv \ \ definit \ \ für \ \ \xi \neq 0$$

σ^T bezeichnet die zu σ transponierte Matrix. Außerdem können damit und mit folgender Bedingung elliptische Differentialoperatoren in $x \in \mathbb{R}^n$ definiert werden:

$$det(\sigma(L, x, \xi)) \neq 0 \ \ \forall \ \ \xi \in R^n$$

Daraus folgt:
L stark elliptisch $\Rightarrow$ L elliptisch

Außerdem gilt für $N = 1$:
L stark elliptisch $\Leftrightarrow$ L elliptisch

Schließlich folgt aus der Definition des Symbols:

$$\sigma(L_1 L_2) = \sigma(L_1)\sigma(L_2)$$

Für $N = 1$ sind also Produkte stark elliptischer Differentialoperatoren selbst wieder stark elliptisch, d.h. die in dieser Arbeit betrachteten stark elliptischen Operatoren sind allgemeiner als die von Polden [Pol96] betrachteten.

Beispiel 2.1.3. *Ein stark elliptischer Differentialoperator 2m-ter Ordnung:*

$$L = (-\Delta)^m$$

Der Operator ist stark elliptisch, da alle seine Eigenwerte strikt positiv sind, was leicht durch partielle Integration einzusehen ist.

Die nun folgenden Definitionen und Sätze findet man unter anderem auch bei Friedman [Fri69], allerdings nur für eine skalare Gleichung.

Sei $u \in C^\infty(G, \mathbb{R}^N)$. Da alle Koeffizienten von L nach Annahme glatt sind, kann L in Divergenzgestalt geschrieben werden:

$$Lu(x) = \sum_{|\alpha| \le 2m} a^\alpha(x) D_\alpha u(x) = \sum_{|\beta|,|\gamma| \le m} (-1)^{|\beta|} D_\beta(b^{\beta\gamma}(x) D_\gamma u(x))$$

Zum Operator L in Divergenzgestalt existiert ein adjungierter Operator L^*:

$$L^* u(x) = \sum_{|\beta|,|\gamma| \le m} (-1)^{|\gamma|} D_\gamma((b^{\beta\gamma}(x))^T D_\beta u(x))$$

Durch partielle Integration erhält man folgende Formel:

$$< Lu, \varphi >_0 = < u, L^*\varphi >_0 \quad \forall \;\; \varphi \in C_c^\infty(G, \mathbb{R}^N),$$

wobei $< u, v >_0 := < u, v >_{L^2} = \int\limits_G uvdx$
Nun wird die dem Operator L zugehörige Bilinearform B definiert:

$$B(u, v) := \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} \int_G b^{\alpha\beta} D_\alpha u D_\beta v dx$$

Bemerkung 2.1.4. *Sei $\varphi \in C^\infty(G, \mathbb{R}^N)$, $\psi \in C_c^\infty(G, \mathbb{R}^N)$, dann gilt:*

$$B(\varphi, \psi) = < L\varphi, \psi >_0 = < \varphi, L^*\psi >_0$$

Mit Hilfe dieser Definitionen kann eine schwache Version des Dirichletproblems für Systeme elliptischer Differentialgleichungen formuliert werden. Zunächst soll jedoch an die klassische Version des Dirichletproblems erinnert werden, da es für Gleichungen höherer Ordnung weniger geläufig ist. Seien $u,\ f,\ g \in C^\infty(G, \mathbb{R}^N)$, dann ist u eine Lösung des Dirichtletproblems zu gegebenen Randwerten g, falls gilt:

$$Lu = f \quad \text{in } G$$

$$D_\alpha u = D_\alpha g \quad \text{auf } \partial G, \quad \text{für} \quad |\alpha| \leq m-1$$

Definition 2.1.5 (Schwache Version des Dirichletproblems). *u heißt schwache Lösung des Dirichletproblems, falls für $f \in L^2(G, \mathbb{R}^N)$, $g \in H^{2m,2}(G, \mathbb{R}^N)$ gilt:*

$$u - g \in H_0^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$$

$$B(u, \varphi) =< f, \varphi >_0 \quad \forall\ \varphi\ \in H_0^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$$

Das wichtigste Hilfsmittel im Beweis der L^2-Regularität ist die Gårdingsche Ungleichung:

Satz 2.1.6 (Gårdingsche Ungleichung). *Sei G ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $b^{\alpha\beta} \in C^\infty(\overline{G}, \mathbb{R}^{N^2})$, L stark elliptisch, d.h. es existiere ein $\lambda > 0$, so daß für alle $x \in G$, für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und für alle $\eta \in \mathbb{R}^N$ gilt:*

$$\sum_{j,k=1}^{N} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} b_{jk}^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta\eta^j\eta^k \geq \lambda|\xi|^{2m}|\eta|^2$$

Dann ist $B(u,v) =< b^{\alpha\beta}D_\alpha u, D_\beta v >_0$ eine stetige Bilinearform auf $H^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$. Außerdem existieren Konstanten $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, so daß für alle $u \in H_0^{m,2}$ gilt:

$$B(u,u) \geq c_1||u||_m^2 - c_2||u||_0^2,$$

wobei $||u||_m := ||u||_{H^{m,2}}$.

Beweis:
Einen Beweis dieses Satzes findet man unter anderem bei Agmon [Agm65].
Es genügt, die Ungleichung zu beweisen:
1. Schritt:
Sei $B(u,u) = B(u) = A(u) + R(u)$, wobei

$$A(u) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} < b^{\alpha\beta}D_\alpha u, D_\beta v >_0$$

$$R(u) = \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|<2m \\ |\alpha|,|\beta|\leq m}} < b^{\alpha\beta}D_\alpha u, D_\beta v >_0$$

Es gilt mit der Schwarz'schen Ungleichung für $u \in H^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$:

$$|R(u)| \leq c||u||_m||u||_{m-1}$$

Durch Interpolation erhält man:

$$||u||_k^2 \leq \epsilon||\nabla^m u||_0^2 + c(\epsilon)||u||_0^2 \quad \forall u \in H_0^{m,2}(G, \mathbb{R}^N) \quad \forall \quad 0 < k < m$$

Daraus folgt:

$$|R(u)| \leq \epsilon ||\nabla^m u||_0^2 + c(\epsilon)||u||_0^2,$$

folglich genügt es die Ungleichung für folgenden Fall zu zeigen:

$$b_{jk}^{\alpha\beta} = 0 \ \text{ für } \ |\alpha| + |\beta| < 2m$$

<u>2. Schritt:</u>
Es soll gezeigt werden, daß es ausreicht, die Existenz einer Zahl $\delta > 0$ zu zeigen, so daß die Ungleichung für alle $u \in H_0^{m,2}(G \cap B_\delta(x_0))$ gilt, wobei $x_0 \in \overline{G}$ beliebig und c_1, c_2 unabhängig von x_0 sind.
Dann kann eine Überdeckung von $\overline{G}$ durch Kugeln $B_l := B_\delta(x_l)$ mit Mittelpunkt $x_l \in \overline{G}$, $l = 1, \ldots, r$ und eine Zerlegung $\{\eta_l\}$ der Eins durch Funktionen $\eta_l \in C_c^\infty(B_l)$ derart gefunden werden, daß Folgendes gilt:

$\sum_{l=1}^r \eta_l^2 = 1$

$0 \leq \eta_l \leq 1$ auf $\overline{G}$

Daraus folgt für $u \in H_0^{m,2}(G)$ die Zerlegung

$$u_l := \eta_l u$$

mit $l = 1, \ldots, r$ und schließlich:

$$\begin{aligned} B(u) &= A(u) =< b^{\alpha\beta} D_\alpha u, D_\beta u >_0 \\ &= \sum_{l=1}^r < b^{\alpha\beta} \eta_l D_\alpha u, \eta_l D_\beta u >_0 \\ &\geq \sum_{l=1}^r < b^{\alpha\beta} D_\alpha u_l, D_\beta u_l >_0 - c||u||_m ||u||_{m-1} \\ &\geq \sum_{l=1}^r (c_1 ||u_l||_m^2 - c_2 ||u_l||_0^2) - \epsilon ||u||_m^2 - c(\epsilon)||u||_0^2 \\ &\geq \frac{c_1}{2} ||u||_m^2 - \tilde{c}_2 ||u||_0^2 \end{aligned}$$

<u>3. Schritt:</u>
Um die Existenz einer Zahl $\delta > 0$ aus Schritt 2 zu zeigen, reicht es die Abschätzung

$$A(u) \geq \lambda ||\nabla^m u||_0^2 \ \ \forall \ \ u \in H_0^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$$

unter der Annahme $b^{\alpha\beta}$ =const. zu beweisen.
Denn zu jedem $\rho > 0$ existiert aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit der $b^{\alpha\beta}$ ein $\delta = \delta(\rho)$, so daß:

$$|b^{\alpha\beta}(x) - b^{\alpha\beta}(x_0)| < \rho,$$

falls $|x - x_0| < \delta$ und $|\alpha| + |\beta| = 2m$. Für ein beliebiges aber fest gewähltes $x_0 \in G$ definiere:

$$\tilde{b}^{\alpha\beta} := b^{\alpha\beta}(x_0)$$

Dann erhält man:

$$\begin{aligned} A(u) &= < b^{\alpha\beta} D_\alpha u, D_\beta u >_0 \\ &= < \tilde{b}^{\alpha\beta} D_\alpha u, D_\beta u >_0 + < (b^{\alpha\beta} - \tilde{b}^{\alpha\beta}) D_\alpha u, D_\beta u >_0 \\ &=: \tilde{A}(u) + \overline{A}(u), \end{aligned}$$

wobei

$$|\overline{A}(u)| = | < (b^{\alpha\beta} - \tilde{b}^{\alpha\beta}) D_\alpha u, D_\beta u >_0 | \quad \leq c\rho ||u||_m^2$$

für $u \in H_0^{m,2}(G \cap B_\delta(x_0), \mathbb{R}^N)$ und

$$\tilde{A}(u) \geq \lambda ||\nabla^m u||_0^2 \quad \forall \;\; u \in H_0^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$$

Daraus erhält man mit Interpolation für $u \in H_0^{m,2}(G \cap B_\delta(x_0), \mathbb{R}^N)$, falls $\rho c < \frac{\lambda}{2}$:

$$\begin{aligned} A(u) &\geq \lambda ||\nabla^m u||_0^2 - c\rho ||u||_m^2 \\ &\geq \frac{\lambda}{2} ||\nabla^m u||_0^2 - c||u||_{m-1}^2 \\ &\geq \frac{\lambda}{4} ||\nabla^m u||_0^2 - c||u||_0^2 \end{aligned}$$

<u>4. Schritt:</u>
Es muß gezeigt werden, daß für alle $u \in H_0^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$

$$A(u) \geq \lambda ||\nabla^m u||_0^2,$$

wenn zusätzlich $b^{\alpha\beta}$ =const.
Es kann ohne Einschränkung $b_{jk}^{\alpha\beta} = b_{kj}^{\beta\alpha}$ angenommen werden, sonst setze

$$c_{jk}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(b_{jk}^{\alpha\beta} + b_{kj}^{\beta\alpha}).$$

Dann gilt:

$$< b^{\alpha\beta} D_\alpha u, D_\beta u >_0 = < c^{\alpha\beta} D_\alpha u, D_\beta u >_0$$

Außerdem erfüllt $c^{\alpha\beta}$ dieselbe Elliptizitätsbedingung wie $b^{\alpha\beta}$.
Da $C_c^\infty(G, \mathbb{R}^N)$ dicht in $H_0^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$ ist, genügt es die Ungleichung für $u \in C_c^\infty(G, \mathbb{R}^N)$ zu beweisen.
Sei $\hat{u}$ die Fouriertransformierte von u, dann ist

$$\widehat{D_\alpha u^j} = i^{|\alpha|} \xi_\alpha \hat{u}^j$$

und

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int e^{-ix\xi} u(x) dx.$$

Setze

$$\hat{u}^j = \phi^j + i\psi^j.$$

Dann erhält man:

$$\hat{u}^j \overline{\hat{u}^k} = (\phi^j \phi^k + \psi^j \psi^k) + i(\phi^k \psi^j - \phi^j \psi^k)$$

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt schließlich:

$$\begin{aligned}
A(u) &= b^{\alpha\beta}_{jk} < D_\alpha u^j, D_\beta u^k >_0 = b^{\alpha\beta}_{jk} < \hat{D_\alpha u^j}, \overline{\hat{D_\beta u^k}} >_0 \\
&= b^{\alpha\beta}_{jk} < \xi_\alpha \hat{u}^j, \xi_\beta \overline{\hat{u}^k} >_0 = \int b^{\alpha\beta}_{jk} \xi_\alpha \xi_\beta (\phi^j \phi^k + \psi^j \psi^k) d\xi \\
&\geq \int \lambda |\xi|^{2m} \delta_{jk} (\phi^j \phi^k + \psi^j \psi^k) d\xi \\
&\geq \lambda \int |\xi|^{2m} \delta_{jk} \hat{u}^j \overline{\hat{u}^k} d\xi \\
&\geq \lambda \int \sum_{|\alpha|=m} |D_\alpha u|^2 d\xi,
\end{aligned}$$

da $|\xi|^{2m} \geq \sum_{|\alpha|=m} \xi^{2\alpha}$.
Nun folgt

$$A(u) \geq \lambda ||\nabla^m u||_0^2$$

Dies war die für die Gårdingsche Ungleichung zu beweisende Behauptung..

□

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt,

$$Lu(x) = \sum_{|\beta|,|\gamma| \leq m} (-1)^{|\beta|} D_\beta (b^{\beta\gamma}(x) D_\gamma u(x))$$

stark elliptisch, $b^{\alpha\beta} \in C^\infty(\overline{G}, \mathbb{R}^{N^2})$ und $u \in H^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$ sei eine Lösung von $Lu = f$ in G. Dann erhält man:

Satz 2.1.7 (Innere L^2-Regularität)**.** *Sei $f \in H^{s,2}(G, \mathbb{R}^N)$, $s \geq -m$, $u \in H^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$ mit $Lu = f$ schwach in G. Dann gilt für jedes $G' \subset\subset G$: $u \in H^{2m+s,2}(G', \mathbb{R}^N)$ und*

$$||u||_{2m+s,G'} \leq (||f||_{s,G} + ||u||_{0,G}) \quad mit \quad c = c(G, G', b^{\alpha\beta}, m, s, n, N)$$

Beweis:
Der Beweis wird durch Induktion über s und mit Hilfe von Differenzenquotienten geführt. Die Beweisidee ist dieselbe wie im Fall einer skalaren Gleichung zweiter Ordnung (siehe [Kuw98]). Dieser Satz wurde bereits von Nirenberg [Nir55] bewiesen. Allerdings ist seine Beweismethode erheblich komplizierter.
Induktionsanfang $s = -m$:
Definiere eine Abschneidefunktion $\zeta \in C_c^\infty(G)$ mit:

$$0 \leq \zeta \leq 1, \quad \zeta \equiv 1 \text{ auf } G'$$

$$||D_\alpha \zeta||_{L^\infty} \leq c(G, G') \;\; \forall \;\; \alpha$$

Mit Hilfe der Gårdingschen Ungleichung folgt:

$$B(\zeta^m u, \zeta^m u) \geq c_1 ||\zeta^m u||_m^2 - c_2 ||\zeta^m u||_0^2,$$

Außerdem gilt mit Lu aufgefaßt als Element von $H^{-m,2}(G, \mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned}
|(L(\zeta^m u))(\zeta^m u)| &\leq ||L(\zeta^m u)||_{-m} ||\zeta^m u||_m \\
&\leq \epsilon ||\zeta^m u||_m^2 + c ||L(\zeta^m u)||_{-m}^2
\end{aligned}$$

Da $B(\zeta^m u, \zeta^m u) = (L(\zeta^m u))(\zeta^m u)$, folgt:

$$||\zeta^m u||_m^2 \leq c(||L(\zeta^m u)||_{-m}^2 + ||u||_0^2)$$

Der erste Term auf der rechten Seite wird durch Interpolation abgeschätzt (siehe [KS02]):

$$\begin{aligned} ||L(\zeta^m u)||_{-m}^2 &\leq c(||f||_{-m}^2 + \sum_{|\alpha|<m} \int_G \zeta^{2\alpha} |D_\alpha u|^2) \\ &\leq c(||f||_{-m}^2 + ||u||_0^2 + \epsilon \sum_{|\alpha|=m} \int_G \zeta^{2m} |D_\alpha u|^2) \end{aligned}$$

Durch Verschlucken folgt die Behauptung für den Fall $s = -m$.

<u>Induktionsschritt $s-1 \to s$:</u>
Zunächst sollen in zwei Lemmata Eigenschaften des Differenzenquotienten zusammengefaßt werden, die entweder schnell nachzurechnen sind, oder in [GT01] bewiesen werden.
Fixiere eine Koordinatenrichtung $e_j, 1 \leq j \leq n$, dann definiere den Differenzenquotienten durch :

$$(\Delta^h u)(x) = \frac{1}{h}(u(x+he_j) - u(x)) \quad (h \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$$
$$(u^h)(x) = u(x+he_j)$$

Lemma 2.1.8 (Rechenregeln für Differenzenquotienten)**.** *Für $|h| < \delta$ gilt auf $G_\delta := \{x \in G : dist(x, \mathbb{R}^n \backslash G) > \delta\}$:*

(1) $\Delta^h(uv) = (\Delta^h u)v + u^h(\Delta^h v)$

(2) $\Delta^h(Du) = D\Delta^h u$

(3) $\int_G (\Delta^h u)v = -\int_G u(\Delta^{-h} v)$*, falls* $v \equiv 0$ *auf* $\mathbb{R}^n \backslash \overline{G}_\delta$

(4) $||\Delta^h u||_{p,G_\delta} \leq ||D_j u||_{p,G}$ *für* $u \in H^{1,p}(G, \mathbb{R}^N)$

□

Lemma 2.1.9. *Sei $u \in L^p(G, \mathbb{R}^N)$ für $1 < p \leq \infty$. Es gelte*

$$\limsup_{h\to 0} ||\Delta^h u||_{p,G_\delta} \leq K < \infty \quad \forall \quad \delta > 0.$$

Dann existiert $D_j u \in L^p(G, \mathbb{R}^N)$, und es gilt $||D_j u||_{p,G} \leq K$.

□

Aus den beiden obigen Lemmata und der Distributionsgleichung

$$\Delta^h(Lu) = \Delta^h f$$

folgt auf G_δ für $|h| < \delta$ die schwach geltende Gleichung:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha(b^{\alpha\beta} D_\beta(\Delta^h u)) &= \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|+1} D_\alpha((\Delta^h b^{\alpha\beta}) D_\beta(u^h)) \\ &+ (\Delta^h f) =: f_s \end{aligned}$$

Nun soll die rechte Seite in $H^{s-1,2}$ abgeschätzt werden:

$$
\begin{aligned}
|| \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} D_\alpha((\Delta^h b^{\alpha\beta}) D_\beta(u^h) \quad) \quad ||_{s-1,G_\delta} & \\
&\le \; || \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} ((\Delta^h b^{\alpha\beta}) D_\beta(u^h))||_{m+s-1,G_\delta} \\
&\le \; c||u||_{2m+s-1,G_\delta}
\end{aligned}
$$

$$||(\Delta^h f)||_{s-1,G_\delta} \le c||f||_{s,G_\delta}$$

Man erhält induktiv für die rechte Seite:

$$||f_s||_{s-1,G_\delta} \le c(||f||_{s,G} + ||u||_{0,G})$$

Weiterhin folgt induktiv aus der Gleichung:

$$
\begin{aligned}
||\Delta^h u||_{2m+s-1,G_{2\delta}} &\le c(||f_s||_{s-1,G_\delta} + ||\Delta^h u||_{0,G_\delta}) \\
&\le c(||f||_{s,G} + ||u||_{0,G})
\end{aligned}
$$

Mit $h \to 0$ folgt die Behauptung aus Lemma (2.1.9).

□

Jetzt sollen die L^2-Abschätzungen am Rand betrachtet werden. Dabei beschränke man sich zunächst auf den Fall eines Gebietes $B_1^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, \quad x_n \ge 0\}$ und verallgemeinere die Aussage dann auf allgemeine Gebiete.

Satz 2.1.10 (L^2-Abschätzungen am Rand)**.** *Sei $f \in H^{s,2}(B_1^+, \mathbb{R}^N)$, $g \in H^{2m+s,2}(B_1^+, \mathbb{R}^N)$, $s \ge -m$ und $u \in H^{m,2}(B_1^+, \mathbb{R}^N)$ schwache Lösung des Dirichletproblems, dann gilt für alle $\delta > 0$:*

$$u \in H^{2m+s,2}(B_{1-\delta}^+, \mathbb{R}^N) \quad \textit{und}$$

$$||u||_{2m+s,B_{1-\delta}^+} \le c(||f||_{s,B_1^+} + ||g||_{2m+s,B_1^+} + ||u||_{0,B_1^+})$$

Beweis:
Wie in Satz (2.1.7) verläuft der Beweis ähnlich zu dem Beweis der entsprechenden Aussage im Fall einer skalaren Gleichung zweiter Ordnung (siehe [Kuw98]). Nirenberg beweist in [Nir55] auch L^2-Abschätzungen am Rand. Allerdings erhält er ein schlechteres Resultat. Er muß höhere Regularitätsvoraussetzungen an f stellen. Genauer benötigt er $f \in H^{m+s-1,2}(B_1^+, \mathbb{R}^N)$.

Zunächst kann ohne Einschränkung $g = 0$ gesetzt werden, sonst definiere

$$U := u - g$$

Dann löst U die Gleichung

$$LU = F := \underbrace{f - Lg}_{\in H^{s,2}} \quad \text{in} \quad B_1^+$$

und
$$U \in H_0^{m,2}(B_1^+, \mathbb{R}^N).$$
Außerdem impliziert eine Abschätzung für U trivialerweise die gewünschte Abschätzung für u.

Mit D_x werden im Folgenden immer Ableitungen in eine der Richtungen e_j, $1 \leq j \leq n-1$, bezeichnet, mit D_y die Ableitung in Richtung e_n.

Induktionsanfang $s = -m$:
Die Funktion $\zeta^m u \in H_0^m(B_1^+, \mathbb{R}^N)$ aus Satz 2 ist als Testfunktion zulässig und die Abschätzung aus dem Induktionsanfang von Satz (2.1.7) kann hier angewendet werden.

Induktionsschritt $s-1 \rightarrow s$:
Für eine tangentiale Richtung e_j, $1 \leq j \leq n-1$, hat $\Delta^h u$ Nullrandwerte und die Methode aus dem Induktionsschritt von Satz (2.1.7) findet Anwendung, um folgende Abschätzung zu erhalten:
$$||D_x D_\alpha u||_{0,B_{1-\delta}^+} \leq c(||f||_{s,B_1^+} + ||u||_{0,B_1^+}) \text{ für } |\alpha| \leq 2m+s-1$$
Damit sind alle Terme mit Ableitungsordnung $\leq 2m+s$ von u abgeschätzt bis auf
$$D_y^{2m+s} u$$
Sei a_y^α in der Differentialgleichung der Koeffizient von $D_y^{2m} u$, dann folgt aus der starken Elliptizität:
$$a_y^\alpha \text{ ist invertierbar.}$$
Also kann die Gleichung wie folgt geschrieben werden:
$$D_y^{2m} u = (a_y^\alpha)^{-1}(-\sum_{\substack{|\alpha| \leq 2m \\ \alpha_n \leq 2m-1}} a^\alpha D_\alpha u + f)$$
Da nun nach Induktionsvoraussetzung und tangentialer Ableitung alle Terme auf der rechten Seite in der $H^{s,2}$-Norm abgeschätzt wurden, erhält man:
$$||D_y^{2m} u||_{s,B_{1-\delta}^+} \leq c(||f||_{s,B_1^+} + ||u||_{0,B_1^+})$$
Es gilt also:
$$||u||_{2m+s,B_{1-\delta}^+} \leq c(||f||_{s,B_1^+} + ||u||_{0,B_1^+})$$
Dies ist die Behauptung.

□

Lemma 2.1.11. *Seien $G, \tilde{G} \subset \mathbb{R}^n$, $L = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} D_\beta(b^{\alpha\beta}(x) D_\alpha)$ ein stark elliptischer Differentialoperator auf $G \in \mathbb{R}^n$ und $\phi : G \rightarrow \tilde{G}$ ein C^∞-Diffeomorphismus mit*
$$||\phi||_{C^k} + ||\phi^{-1}||_{C^k} \leq M \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt:

$$\tilde{L} := \sum_{|\gamma|,|\delta|\leq m} \tilde{D}_\delta(\tilde{b}^{\gamma\delta}(y)\tilde{D}_\gamma)$$

ist ein stark elliptischer Differentialoperator auf $\tilde{G}$, wobei $y := \phi(x)$ und $\tilde{D}_\alpha := (\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial y_1^{\alpha_1}}) \cdots (\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial y_n^{\alpha_n}})$, sowie $\tilde{b}^{\gamma\delta} = \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\leq m \\ e^1+\cdots+e^m=\alpha \\ f^1+\cdots+f^m=\beta}} (b^{\alpha\beta}\circ\psi)(D_{e^i}\phi\circ\psi)^\gamma(D_{f^j}\phi\circ\psi)^\delta|\det D\psi|$.

Beweis:
Sei $\phi^{-1} := \psi$, $u \in H^{m,2}(G,\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in H_0^{m,2}(G,\mathbb{R}^N)$ und sei $v,\eta : \tilde{G} \to \mathbb{R}^N$ mit $u = v\circ\phi$, $\varphi = \eta\circ\phi$.
Es reicht aus nur Terme zu betrachten, die für den Hauptteil eine Rolle spielen, da lediglich festgestellt werden muß, ob der Operator stark elliptisch ist.
Man erhält:

$$\begin{aligned}
B(u,\varphi) &= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_G b^{\alpha\beta} D_\alpha u D_\beta \varphi \\
&= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_G b^{\alpha\beta} D_\alpha(v\circ\phi) D_\beta(\eta\circ\phi) \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=|\beta|=m \\ |\gamma|=|\delta|=m \\ e^1+\cdots+e^m=\alpha \\ f^1+\cdots+f^m=\beta}} \int_{\tilde{G}} (b^{\alpha\beta}\circ\psi)(D_{e^i}\phi\circ\psi)^\gamma \tilde{D}_\gamma v (D_{f^j}\phi\circ\psi)^\delta \tilde{D}_\delta \eta |\det D\psi|
\end{aligned}$$

Nach Definition sind alle Koeffizienten von $\tilde{b}^{\gamma\delta}$ glatt und zusätzlich alle Normen beschränkt. Weiterhin seien $\zeta_\alpha := \sum_{e^i}(D_{e^i}\phi\circ\psi)^\gamma\xi_\gamma$, $\zeta_\beta := \sum_{f^j}(D_{f^j}\phi\circ\psi)^\delta\xi_\delta$, dann gilt:

$$|\xi| \leq c|\zeta|, \quad |\det D\psi| \geq c \geq 0$$

Daraus folgt unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention:

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_{ij}^{\gamma\delta}\xi_\gamma\xi_\delta\eta^i\eta^j &= \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta| \\ e^k \\ f^l}} (b_{ij}^{\alpha\beta}\circ\psi)(D_{e^k}\phi\circ\psi)^\gamma(D_{f^l}\phi\circ\psi)^\delta|\det D\psi|\xi_\gamma\xi_\delta\eta^i\eta^j \\
&= (b_{ij}^{\alpha\beta}\circ\psi)\zeta_\alpha\zeta_\beta\eta^i\eta^j|\det D\psi| \\
&\geq c\lambda|\zeta|^{2m}|\eta|^2 \\
&\geq c\lambda|\xi|^{2m}|\eta|^2
\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung.

□

Damit erhält man nun globale L^2-Abschätzungen:

Satz 2.1.12 (Globale L^2-Abschï£¡tzungen)**.** *Sei $f \in H^{s,2}(G,\mathbb{R}^N)$, $g \in H^{2m+s,2}(G,\mathbb{R}^N)$, $s \geq -m$ und $u \in H^{m,2}(G,\mathbb{R}^N)$ schwache Lösung des Dirichletproblems, dann gilt:*

$$u \in H^{2m+s,2}(G,\mathbb{R}^N) \quad \textit{und}$$

$$||u||_{2m+s,G} \leq c(||f||_{s,G} + ||g||_{2m+s,G} + ||u||_{0,G})$$

Beweis:
Es kann wieder angenommen werden, daß $g = 0$ wie oben, und nach Definition findet man zu jedem $x_0 \in \partial G$ eine Umgebung U, so daß gilt:

$$\exists \ C^\infty\text{-Diffeomorphismus } \phi : U \to B_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

$$\text{mit } \phi(U \cap G) = B_1^+ \text{ und } \phi(x_0) = 0.$$

Auf B_1^+ kann Satz (2.1.10) angewendet werden. Man erhält die gewünschte Abschätzung unter Anwendung von Lemma (2.1.11) und des Transformationssatzes in $H^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$ sowie der daraus resultierenden Äquivalenz der Normen auf $U \cap G$ und B_1^+. Im Inneren von G läßt sich stets eine geeignete Umgebung finden, so daß Satz (2.1.7) angewendet werden kann. Die gewünschte Aussage folgt aus einem Überdeckungsargument nach Heine-Borel durch Aufsummieren der einzelnen Abschätzungen.

□

Dieses hier betrachte Dirichletproblem für stark elliptische Differentialgleichungssyteme ist nicht das allgemeinste elliptische Randwertproblem, für das man die L^2-Regularität beweisen kann. Eine sehr ausführliche Darstellung der Regularitätstheorie für allgemeinere Randwertprobleme findet man in den Arbeiten von Agmon, Douglis und Nirenberg [ADN59], [ADN64].

2.2 Parabolische L^2-Abschätzungen

Nun wird das zu dem elliptischen Problem gehörige parabolische Problem betrachtet, wobei L wieder einen stark elliptischen Differentialoperator der Ordnung $2m$ mit denselben Voraussetzungen an die Koeffizienten, die nun auch von t abhängig sein können, bezeichnet.
In diesem Abschnitt erfolgt die Argumentation wiederum in Analogie zu dem bereits erwähnten Fall einer skalaren Gleichung zweiter Ordnung (siehe [Eva98] oder [Kuw98]). Für den Fall allgemeinerer elliptischer Operatoren sei z.B. [Wlo82] angeführt, wobei in dieser Arbeit allerdings nur eine Gleichung und kein System betrachtet wird. Als weitere Referenz seien das Buch von Friedman [Fri64] und die Arbeit von Ejdel'man [Ejd94] genannt. Einen generellen Einblick in parabolische Systeme liefert das Buch von Ejdel'man [Ejd69].
Es seien $u_0 \in H_0^{m,2}(G, \mathbb{R}^N)$, $f \in L^2(0,T; L^2(G, \mathbb{R}^N))$ und $u \in L^2(0,T; H_0^{m,2}(G, \mathbb{R}^N))$ sei eine schwache Lösung von:

(1) $\partial_t u + Lu = f$ in $G \times (0,T)$

$u = u_0$ auf $G \times \{0\}$

$D_\alpha u = 0$ auf $\partial G \times [0,T]$ $\forall$ $|\alpha| \leq m-1$

mit $\dot{u} \in L^2(0,T; L^2(G, \mathbb{R}^N))$.
Wenn man nun die Gleichung (1) mit u testet, erhält man aus der Gårdingschen Ungleichung (Satz (2.1.6)) für alle $t \in (0,T)$:

$$\begin{aligned}
||u(t)||_0^2 - ||u_0||_0^2 &= 2\int_0^t < \dot{u}(s), u(s) > ds \\
&= -2\int_0^t < Lu(s), u(s) > ds + 2\int_0^t < f(s), u(s) > ds \\
&\leq -c\int_0^t ||u(s)||_m^2 ds + c\int_0^t ||u(s)||_0^2 ds \\
&+ 2\int_0^t < f(s), u(s) > ds \\
&\leq -c\int_0^t ||u(s)||_m^2 ds + c\int_0^t ||u(s)||_0^2 ds \\
&+ c\int_0^t ||f(s)||_0^2 ds
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$||u(t)||_0^2 \leq c\int_0^t ||u(s)||_0^2 ds + B(t),$$

wobei $B(t) := ||u_0||_0^2 - c\int_0^t ||u(s)||_m^2 ds + c\int_0^t ||f(s)||_0^2 ds$.

Jetzt folgt weiter aus der Gronwallschen Ungleichung (siehe z.B. [Eva98]):

$$\begin{aligned} ||u(t)||_0^2 &\leq e^{ct}B(0) + \int_0^t e^{c(t-s)}B'(s)ds \\ &\leq e^{ct}(||u_0||_0^2 + c\int_0^t ||f(s)||_0^2 ds) \\ &- c\int_0^t ||u(s)||_m^2 ds \end{aligned}$$

Damit erhält man die erste wichtige Abschätzung:

$$\max_{(0,T)} ||u(t)||_0^2 + ||u||^2_{L^2(0,T;H^{m,2})} \leq e^{cT}(||u_0||_0^2 + ||f||^2_{L^2(0,T;L^2)}) \tag{2.1}$$

Da $\dot{u} \in L^2(0,T;L^2(G,\mathbb{R}^N))$ für alle $t \in (0,T)$, kann Gleichung (1) mit $\dot{u}$ getestet werden:

$$\begin{aligned} ||\dot{u}(t)||_0^2 &= -< Lu(t), \dot{u}(t) >_2 + < f(t), \dot{u}(t) >_2 \\ &\leq -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}B(u(t),u(t)) + \frac{1}{2}||\dot{u}(t)||_0^2 + c||f(t)||_0^2 \\ &- c\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m}\int_G \dot{b}^{\alpha\beta}(t)D_\alpha u(t)D_\beta u(t) \end{aligned}$$

Durch Integration von 0 bis t und mit Hilfe der Gårdingschen Ungleichung (Satz (2.1.6)) erhält man:

$$\begin{aligned} \int_0^t ||\dot{u}(s)||_0^2 ds &\leq -c||u(t)||_m^2 + c||u_0||_m^2 \\ &+ c||u(t)||_0^2 - c||u_0||_0^2 \\ &+ c\int_0^t ||f(s)||_0^2 ds + c||u||^2_{L^2(0,T;H^{m,2})} \end{aligned}$$

Mit Abschätzung (2.1) folgt:

$$||\dot{u}||^2_{L^2(0,T;L^2)} + ||u||^2_{L^\infty(0,T;H^{m,2})} \leq c(||u_0||_m^2 + ||f||_{L^2(0,T;L^2)})$$

Durch Anwendung der globalen elliptischen Abschätzungen (Satz (2.1.12)) auf das obige Randwertproblem erhält man für alle $t \in (0,T)$:

$$\begin{aligned} ||u(t)||_{2m} &\leq c(||Lu(t)||_0 + ||u(t)||_0) \\ &\leq c(||\dot{u}(t)||_0 + ||f(t)||_0 + ||u(t)||_0) \end{aligned}$$

Dies ergibt die zweite wichtige Abschätzung:

$$\begin{aligned} &||u||_{L^\infty(0,T;H^{m,2})} + ||u||_{L^2(0,T,H^{2m,2})} + ||\dot{u}||_{L^2(0,T;L^2)} \\ &\qquad \leq c(||u_0||_m + ||f||_{L^2(0,T;L^2)}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 2.2.1 (Parabolische L^2-Regularität). *Sei $u_0 \in H_0^{m,2}(G)$, $f \in L^2(0,T;L^2(G))$ und sei $u \in L^2(0,T;H_0^{m,2}(G))$ schwache Lösung des parabolischen Differentialgleichungssystems (1) mit $\dot{u} \in L^2(0,T;L^2(G))$, dann gilt:*

$$u \in L^2(0,T;H^{2m,2}(G)) \cap L^\infty(0,T;H_0^{m,2}(G)),$$

wobei zur Abkürzung auf die Angabe des Zielraumes, in diesem Fall $\mathbb{R}^N$, verzichtet wurde. Zusätzlich gelten die Abschätzungen:

(2.3) $||u||_{L^\infty(0,T;L^2(G))} + ||u||_{L^2(0,T;H^{m,2}(G))}$
$\leq c(||u_0||_0 + ||f||_{L^2(0,T;L^2(G))})$

(2.4) $||u||_{L^\infty(0,T;H^{m,2}(G))} + ||u||_{L^2(0,T,H^{2m,2}(G))} + ||\dot{u}||_{L^2(0,T;L^2(G))}$
$\leq c(||u_0||_m + ||f||_{L^2(0,T;L^2(G))})$,

wobei $c = c(n,N,L,G,T)$.

□

Als Nächstes soll die höhere L^2-Regularität bewiesen werden. Dies geschieht durch Induktion:

Satz 2.2.2 (Höhere parabolische L^2-Regularität). *Sei nun $k \geq 0$, $u_0 \in H_0^{m(2k+1),2}(G)$, $\frac{d^l}{dt^l} f \in L^2(0,T;H^{2m(k-l),2}(G))$ für $0 \leq l \leq k$ und sei $u \in L^2(0,T;H_0^{m,2}(G))$ eine schwache Lösung des Differentialgleichungssytems (1). Zusätzlich seien die folgenden (k-te Ordnung-) Kompatibiltätsbedingungen (siehe z.B.* [Wlo82], [Eva98]*) erfüllt:*

$$g_0 := u(0) = u_0 \in H_0^{m,2}(G)$$

$$g_1 := u_t(0) = f(0) - L(0)u_0 \quad \in H_0^{m,2}(G)$$

$$g_2 := u_{tt}(0) = f_t(0) - L(0)u_t(0) - L_t(0)u_0 \quad \in H_0^{m,2}(G)$$

$$\cdots$$

$$g_k := \tfrac{d^k}{dt^k} u(0) = \tfrac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(0) - \tfrac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(Lu)(0) \quad \in H_0^{m,2}(G)$$

$$g_{k+1} := \tfrac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} u(0) \quad \in L^2(G)$$

Dann gilt:

$$\frac{d^l}{dt^l} u \in L^2(0,T;H^{2m(k-l+1),2}(G)) \quad \text{für} \quad 0 \leq l \leq k+1$$

Außerdem gilt die Abschätzung:

$$\textstyle\sum_{l=0}^{k+1} ||\frac{d^l}{dt^l} u||_{L^2(0,T;H^{2m(k-l+1),2}(G))}$$

$$\leq c(\textstyle\sum_{l=0}^{k} ||\frac{d^l}{dt^l} f||_{L^2(0,T;H^{2m(k-l),2}(G))} + ||u_0||_{m(2k+1)})$$

Mit $c = c(n,N,k,l,m,T,L,G)$.

Beweis:

Induktionsanfang $k = 0$:

Der Induktionsanfang folgt direkt aus Abschätzung (2.4) in Satz (2.2.1).

Induktionsschritt $(0,1,\cdots,k-1) \to k$:

Definiere die Funktion $\tilde{u} := \dot{u}$. Differenziere nun die Gleichung nach t. Dann erfüllt $\tilde{u}$ folgende Gleichungen:

$\tilde{u}_t + L\tilde{u} = \tilde{f} - (\frac{d}{dt}L)u$ in $G \times (0,T)$

$\tilde{u} = \tilde{u}_0$ auf $G \times \{0\}$

$D_\alpha \tilde{u} = 0$ auf $\partial G \times [0,T]$ für $|\alpha| \le m-1$,

wobei $\tilde{f} := f_t$ und $\tilde{u}_0 := f(\cdot,0) - L(0)u_0$.
Da $\hat{f} := \tilde{f} - (\frac{d}{dt}L)u$ und $\tilde{u}_0$ die Kompatibilitätsbedingungen der Ordnung $k-1$ erfüllen, (was leicht einzusehen ist, etwa so:

$\tilde{g}_0 = f(\cdot,0) - L(0)u_0 \quad \in H_0^{m,2}(G)$

$$\begin{aligned}\hat{f}(0) - L(0)\tilde{u}_0 &= f_t(0) - L_t(0)u_0 - L(0)f(\cdot,0) + L(0)^2u_0 \\ &= f_t(0) - L(0)u_t(0) - L_t(0)u_0 \quad \in H_0^{m,2}(G)\end{aligned}$$

$\cdots)$

kann die Abschätzung für $k-1$ auf $\tilde{u}$ angewendet werden und man erhält:

$$\frac{d^l}{dt^l}\tilde{u} \in L^2(0,T;H^{2m(k-l),2}(G)), \quad 0 \le l \le k$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{k} ||\frac{d^l}{dt^l}\tilde{u}||_{L^2(0,T;H^{2m(k-l),2}(G))} &\le c(\sum_{l=0}^{k-1} ||\frac{d^l}{dt^l}\tilde{f}||_{L^2(0,T;H^{2m(k-l-1),2}(G))} \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1} ||\frac{d^l}{dt^l}(\frac{d}{dt}L)u||_{L^2(0,T;H^{2m(k-l-1),2}(G))} \\ &+ ||\tilde{u}_0||_{2mk-m})\end{aligned}$$

Mit $\tilde{u} = \dot{u} = f - Lu$ gilt:

$$\frac{d^l}{dt^l}u \in L^2(0,T;H^{2m(k-l+1),2}(G)), \quad 1 \le l \le k+1$$

und mit der Induktionsvoraussetzung und der Beschränktheit aller Ableitungen der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{k+1} ||\frac{d^l}{dt^l}u||_{L^2(0,T;H^{2m(k-l+1),2}(G))} &\le c(\sum_{l=0}^{k} ||\frac{d^l}{dt^l}f||_{L^2(0,T;H^{2m(k-l),2}(G))} \\ &+ ||f(0)||_{2mk-m} + ||Lu_0||_{2mk-m}).\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Abschätzung (siehe [Eva98] für den Fall $m=1$)

$$||f(0)||_{2mk-m} \le c(||f||_{L^2(0,T;H^{2mk,2})} + ||\dot{f}||_{L^2(0,T;H^{2m(k-1)})})$$

folgt

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{k+1} ||\frac{d^l}{dt^l}u||_{L^2(0,T;H^{2m(k-l+1),2}(G))} &\le c(\sum_{l=0}^{k} ||\frac{d^l}{dt^l}f||_{L^2(0,T;H^{2m(k-l),2}(G))} \\ &+ ||u_0||_{2m(k+1)}).\end{aligned}$$

Indem man für fast alle $0 < t < T$ schreibt:

$$Lu = f - \dot{u} =: h \in H^{2km,2}(G),$$

können die elliptischen L^2-Abschätzungen angewendet werden und man erhält:

$$\begin{aligned} ||u||_{2m(k+1)} &\leq c(||h||_{2km} + ||u||_0) \\ &\leq c(||f||_{2km} + ||\dot{u}||_{2km} + ||u||_0) \end{aligned}$$

Nach Integration dieser Abschätzung von 0 bis T und unter Beachtung der nach Satz (2.2.1) geltenden Abschätzung (2.3):

$$||u||_{L^2(0,T;L^2(G))} \leq c(||f||_{L^2(0,T;L^2(G))} + ||u_0||_0)$$

folgt die Behauptung.

$\square$

Jetzt sollen die Abschätzungen in Ort und Zeit lokalisiert werden.

Satz 2.2.3 (Lokalisierung in der Zeit)**.** *Sei $k \geq 0$, $\frac{d^l}{dt^l} f \in L^2(0,T;H^{2m(k-l),2}(G))$ für $0 \leq l \leq k$ und $u \in L^2(0,T;H_0^{m,2}(G))$ sei eine schwache Lösung von (1), dann gilt für alle $0 < \tau < T$:*

$$\frac{d^l}{dt^l} u \in L^2(\tau, T-\tau; H^{2m(k-l+1),2}(G)) \quad \textit{für} \quad 0 \leq l \leq k+1$$

Außerdem gilt die Abschätzung:

$$\sum_{l=0}^{k+1} ||\tfrac{d^l}{dt^l} u||_{L^2(\tau,T-\tau;H^{2m(k-l+1),2}(G))}$$

$$\leq c(\sum_{l=0}^{k} ||\tfrac{d^l}{dt^l} f||_{L^2(0,T;H^{2m(k-l),2}(G))} + ||u||_{L^2(0,T;L^2(G))}),$$

mit $c = c(k,l,m,T,L,G,\tau)$.

Bemerkung 2.2.4. *In diesem Fall sind die Kompatibilitätsbedingungen nicht nötig, da in der Zeit lokalisiert wird.*

Beweis:

Induktionsanfang k=0:

Definiere eine Abschneidefunktion $\eta \in C_c^\infty(0,T)$ in der Zeit:

$$\begin{aligned} &0 \leq \eta \leq 1 \\ &\eta(t) = 0 \;\; \text{für} \;\; t \leq \frac{\tau}{2} \;\; \text{und} \;\; t \geq T - \frac{\tau}{2} \\ &\eta(t) = 1 \;\; \text{für} \;\; \tau \leq t \leq T - \tau \\ &|\dot{\eta}| \leq \frac{c}{\tau} \end{aligned}$$

Die Funktion (ηu) erfüllt die Gleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t(\eta u) &= (\dot{\eta})u + \eta\dot{u} \\ &= (\dot{\eta})u + \eta f - L(\eta u) \end{aligned}$$

Damit erhält man aus Satz (2.2.1):

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{1} \|\frac{d^l}{dt^l}(\eta u)\|_{L^2(0,T;H^{2m(1-l),2}(G))} &\leq c\|\eta f + (\dot{\eta} u)\|_{L^2(0,T;L^2(G))} \\ &\leq c(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(G))} + \|u\|_{L^2(0,T;L^2(G))})\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung im Fall $k = 0$.

<u>Induktionsschluß :</u>
Wie in Satz (2.2.2) wird die nach t differenzierte Gleichung

$$\tilde{u}_t + L\tilde{u} = \tilde{f} - (\frac{d}{dt}L)u$$

mit $\tilde{u} := \dot{u}$, $\tilde{f} := \dot{f}$ betrachtet. Man wende nun die Abschätzung für $k-1$ auf die Zeitintervalle $(\tau, T-\tau)$ und $(\frac{\tau}{2}, T-\frac{\tau}{2})$ an:

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{k} \|\frac{d^l}{dt^l}\tilde{u}\|_{L^2(\tau,T-\tau;H^{2m(k-l),2}(G))} &\leq c(\sum_{l=0}^{k-1} \|\frac{d^l}{dt^l}\tilde{f}\|_{L^2(\frac{\tau}{2},T-\frac{\tau}{2};H^{2m(k-l-1),2}(G))} \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1} \|\frac{d^l}{dt^l}(\frac{d}{dt}L)u\|_{L^2(\frac{\tau}{2},T-\frac{\tau}{2};H^{2m(k-l-1),2}(G))} \\ &+ \|\tilde{u}\|_{L^2(\frac{\tau}{2},T-\frac{\tau}{2};L^2(G))})\end{aligned}$$

Auf die letzten beiden Terme kann die Induktionsvoraussetzung angewendet werden, wie etwa für $l = k-1$ im zweiten Term nachgerechnet wird:

$$\begin{aligned}\|\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(\frac{d}{dt}L)u\|_{L^2(\frac{\tau}{2},T-\frac{\tau}{2};L^2(G))} &\leq c\sum_{l=0}^{k-1} \|\frac{d^l}{dt^l}u\|_{L^2(\frac{\tau}{2},T-\frac{\tau}{2};H^{2m(k-l),2}(G))} \\ &\leq c\sum_{l=0}^{k} \|\frac{d^l}{dt^l}f\|_{L^2(0,T;H^{2m(k-l),2}(G))} \\ &+ c\|u\|_{L^2(0,T;L^2(G)))}\end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{k+1} \|\frac{d^l}{dt^l}u\|_{L^2(\tau,T-\tau;H^{2m(k-l+1),2}(G))} &\leq c\sum_{l=0}^{k} \|\frac{d^l}{dt^l}f\|_{L^2(0,T;H^{2m(k-l),2}(G))} \\ &+ c\|u\|_{L^2(0,T;L^2(G)))}\end{aligned}$$

Nun fehlt eine Abschätzung für den Term

$$\|u\|_{L^2(\tau,T-\tau;H^{2m(k+1),2}(G))}.$$

Die elliptischen Abschätzungen liefern:

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^{2m(k+1),2}(G)} &\leq c(\|Lu\|^2_{H^{2mk,2}(G)} + \|u\|_0) \\ &\leq c(\|\dot{u}\|^2_{H^{2mk,2}(G)} + \|f\|^2_{H^{2mk,2}(G)} + \|u\|_0)\end{aligned}$$

Durch Integration von τ bis $T-\tau$ folgt die Behauptung.

$\square$

Satz 2.2.5 (Lokalisierung im Ort). *Sei* $k \geq 0$, $u_0 \in H_0^{m(2k+1),2}(G)$, $\frac{d^l}{dt^l} f \in L^2(0,T; H^{2m(k-l),2}(G))$ *für* $0 \leq l \leq k$*, dann gilt für eine schwache Lösung* $u \in L^2(0,T; H_0^{m,2}(G))$ *von (1) und für alle* $\delta > 0$*:*

$$\frac{d^l}{dt^l} u \in L^2(0,T; H^{2m(k-l+1),2}(G_\delta)) \quad \textit{für} \quad 0 \leq l \leq k+1$$

Außerdem gilt die Abschätzung:

$$\sum_{l=0}^{k+1} ||\tfrac{d^l}{dt^l} u||_{L^2(0,T;H^{2m(k-l+1),2}(G_\delta))}$$

$$\leq c(\sum_{l=0}^{k} ||\tfrac{d^l}{dt^l} f||_{L^2(0,T;H^{2m(k-l),2}(G))} + ||u||_{L^2(0,T;L^2(G))} + ||u_0||_{m(2k+1)})$$

Mit $c = c(k,l,m,T,L,G,\delta)$ *und* $G_\delta := \{x \in G : dist(x, \partial G) \geq \delta\}$.

Beweis:

Induktionsanfang k=0:

Definiere eine Abschneidefunktion $\zeta \in C_c^\infty(G)$ im Ort mit:

$$\begin{aligned} &0 \leq \zeta \leq 1 \\ &\zeta(x) = 1 \quad für \quad x \in G_\delta \\ &\zeta(x) = 0 \quad für \quad x \in G \backslash G_{\frac{\delta}{2}} \\ &||D_\alpha \zeta||_0 \leq c(\delta) \quad \forall \alpha \end{aligned}$$

Die Funktion $\zeta^{2m} u$ erfüllt die Gleichung:

$$\begin{aligned} L(\zeta^{2m} u) &= \zeta^{2m} Lu + \sum_{\substack{|\beta| \leq 2m \\ |\gamma| \leq 2m-1 \\ \beta+\gamma=\alpha}} a^\alpha D_\beta(\zeta^{2m}) D_\gamma u \\ &= -\partial_t(\zeta^{2m} u) + \zeta^{2m} f + \sum_{\substack{|\beta| \leq 2m \\ |\gamma| \leq 2m-1 \\ \beta+\gamma=\alpha}} a^\alpha D_\beta(\zeta^{2m}) D_\gamma u \end{aligned}$$

Aus Satz (2.2.1) folgt:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{1} ||\frac{d^l}{dt^l}(\zeta^{2m} u)||_{L^2(0,T;H^{2m(1-l),2}(G))} \\ \leq\ & c||\zeta^{2m} f||_{L^2(0,T;L^2(G))} + c||\sum_{\substack{|\beta| \leq 2m \\ |\gamma| \leq 2m-1 \\ \beta+\gamma=\alpha}} a^\alpha D_\beta(\zeta^{2m}) D_\gamma u||_{L^2(0,T;L^2(G))} \\ +\ & c||u_0||_m \end{aligned}$$

Durch Interpolation (siehe z.B. [KS02] Korollar (5.3)) erhält man:

$$\begin{aligned} &||\sum_{\substack{|\beta| \leq 2m \\ |\gamma| \leq 2m-1 \\ \beta+\gamma=\alpha}} a^\alpha D_\beta(\zeta^{2m}) D_\gamma u||_{L^2(0,T;L^2(G))} \\ \leq\ & c||\sum_{|\alpha| < 2m} a^\alpha \zeta^{|\alpha|} D_\alpha u||_{L^2(0,T;L^2(G))} \\ \leq\ & \epsilon||(\zeta^{2m})u||_{L^2(0,T;H^{2m,2}(G))} + c||u||_{L^2(0,T;L^2(G))} \end{aligned}$$

Durch Verschlucken folgt der Induktionsanfang.

Induktionsschluß:
Der Induktionsschluß folgt analog zu dem Induktionsschluß im Beweis von Satz (2.2.3), mit der Einschränkung, daß auf der rechten Seite der Abschätzung die $H^{2m(k+1)}$-Norm von u_0 berücksichtigt werden muß.

$\square$

Satz 2.2.6 (Lokalisierung in Ort und Zeit)**.** *Sei* $k \geq 0$, $\frac{d^l}{dt^l} f \in L^2(0,T; H^{2m(k-l),2}(G))$ *für* $0 \leq l \leq k$ *und* $u \in L^2(0,T; H_0^{m,2}(G))$ *sei eine schwache Lösung von (1), dann gilt für alle* $0 < \tau < T$ *und* $\delta > 0$*:*

$$\frac{d^l}{dt^l} u \in L^2(\tau, T-\tau; H^{2m(k-l+1),2}(G_\delta)) \quad für \quad 0 \leq l \leq k+1$$

Außerdem gilt die Abschätzung:

$$\sum_{l=0}^{k+1} ||\tfrac{d^l}{dt^l} u||_{L^2(\tau,T-\tau;H^{2m(k-l+1),2}(G_\delta))}$$

$$\leq c(\sum_{l=0}^{k} ||\tfrac{d^l}{dt^l} f||_{L^2(0,T;H^{2m(k-l),2}(G))} + ||u||_{L^2(0,T;L^2(G))}),$$

mit $c = c(k, l, m, T, L, G, \delta, \tau)$.

Beweis:
Betrachte diesmal die zu der Funktion $(\eta\zeta^{2m}u)$ gehörige Gleichung und wende die Abschätzungen der beiden vorherigen Sätze (2.2.3) und (2.2.5) an.

$\square$

Bemerkung 2.2.7. *Es können ähnliche Abschätzungen bewiesen werden, wenn statt*

$$D_\alpha u = 0 \quad auf \quad \partial G \times [0,T] \quad für \quad |\alpha| \leq m-1$$

die allgemeineren Randbedingungen

$$D_\alpha u = D_\alpha g \quad auf \quad \partial G \times [0,T] \quad für \quad |\alpha| \leq m-1$$

für eine genügend reguläre Abbildung g zugelassen werden.
Allerdings müssen hierfür zusätzliche Kompatibilitätsbedingungen gefordert werden (siehe [Wlo82]):

$$\frac{d^j}{dt^j} u(x,0) - \frac{d^j}{dt^j} g(x,0) \in H_0^{m,2}(G) \quad \forall \quad 0 \leq j \leq k$$
$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} u(x,0) - \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} g(x,0) \in L^2(G)$$

Man kann immer ohne Einschränkung $g \equiv 0$ *annehmen, denn sonst betrachte* $u - h$ *und wende die bewiesenen Abschätzungen an.*

2.3 Schauderabschätzungen

Im Folgenden geht es um die Schauderabschätzungen eines parabolischen Differentialgleichungssytems mit stark elliptischem Hauptteil. Die Methode, die für den Beweis der Abschätzungen benutzt wird, stammt von Simon [Sim97]. In seiner Arbeit beweist er für eine allgemeine Klasse von Operatoren, sogenannte "scale elliptic"-Operatoren, Schauderabschätzungen im Inneren und am Rand. Der Fall einer parabolischen Gleichung zweiter Ordnung wurde von Kuwert [Kuw99] explizit ausgeführt. Für den Beweis der Schauderabschätzungen auf einem allgemeinen Gebiet in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, beweist man zunächst Schauderabschätzungen mit verschiedenen Randbedingungen analog zu den elliptischen L^2-Abschätzungen und faßt diese Fälle durch ein Überdeckungsargument zusammen. Als Referenz für Schauderabschätzungen für allgemeinere parabolische Randwertprobleme sei hier die Arbeit von Ejdel'man [Ejd94] genannt. Schauderabschätzungen parabolischer Gleichungen zweiter Ordnung findet man mit anderen Beweismethoden bei Krylov [Kry96].

Definition 2.3.1 (Parabolische Hölderräume)**.** *Seien* $(x_1,t_1),\ (x_2,t_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*, dann ist durch*

$$d\big((x_1,t_1),(x_2,t_2)\big) := \max\{|x_1 - x_2|, (|t_1 - t_2|)^{\frac{1}{2m}}\}$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *definiert.*
Sei $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*, dann definiert man für eine Funktion* $u : G \to \mathbb{R}^N$ *eine parabolische Hölderkonstante durch:*

$$[u]_{\alpha,G} := \sup\{\frac{|u(p) - u(q)|}{d(p,q)^\alpha} : p,q \in G, p \neq q\} \quad \textit{für} \quad 0 < \alpha \leq 1$$

Damit definiere zwei wichtige Funktionsräume für die Schauderabschätzungen:

$$C^{2m,1}(G) := \{u : G \to \mathbb{R}^N : u, \nabla u, \dots, \nabla^{2m} u, \partial_t u \in C^0(G)\}$$

$$[D^{2m,1} u]_{\alpha,G} := [\nabla^{2m} u]_{\alpha,G} + [\partial_t u]_{\alpha,G}$$

$$C^{2m,1,\alpha}(G) := \{u \in C^{2m,1}(G) : [D^{2m,1} u]_{\alpha,G} < \infty\},$$

wobei $D^{k,l} u := \nabla^k u + \frac{d^l}{dt^l} u$*.*
Zusätzlich definiere für $p = (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *einen parabolischen Abstandsball:*

$$U_\delta(p) := \{q \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : d(p,q) < \delta\} = B_\delta(x) \times (t - \delta^{2m}, t + \delta^{2m})$$

Bemerkung 2.3.2. *Aus der Definition der Hölderkonstanten folgt sofort, daß die Funktion* $u : G \to \mathbb{R}^N$ *"parabolisch" α-hölderstetig ist, falls sie im Ort α-hölderstetig und in der Zeit $\frac{\alpha}{2m}$-hölderstetig ist.*

Nun sollen einige Lemmata beweisen werden, die spï£¡ter Anwendung finden. Zunächst wird fï£¡r eine Abbildung $u \in C^{2m,1}(\overline{U}_\delta(p_0), \mathbb{R}^N)$ ein parabolisches Taylerpolynom φ_{p_0} mit Entwicklungspunkt $p_0 = (x_0,t_0)$ eingeführt.

$$\begin{aligned} \varphi_{p_0}(u)(x,t) &:= u(p_0) + \nabla u(p_0)(x - x_0) + \dots \\ &+ \frac{1}{(2m)!} \nabla^{2m} u(p_0)(x - x_0, \dots, x - x_0) + \partial_t u(p_0)(t - t_0) \end{aligned}$$

Damit kann mit Hilfe der Taylorschen Formel komponentenweise berechnet werden:

$$\begin{aligned}
u^i(x,t) - \varphi^i_{p_0}(u)(x,t) &= u^i(x,t) - u^i(x,t_0) + u^i(x,t_0) - \varphi^i_{p_0}(u)(x,t) \\
&= (\partial_t u^i)(x,\tau)(t-t_0) - (\partial_t u^i)(p_0)(t-t_0) + u^i(x,t_0) \\
&- (u^i(p_0) + \nabla u^i(p_0)(x-x_0) + \dots \\
&+ \frac{1}{(2m)!}\nabla^{2m} u^i(p_0)(x-x_0,\dots,x-x_0)) \\
&= [(\partial_t u^i)(x,\tau) - (\partial_t u^i)(p_0)](t-t_0) \\
&+ \frac{1}{(2m)!}[\nabla^{2m} u^i(x_\theta,t_0) - \nabla^{2m} u^i(p_0)](x-x_0,\dots,x-x_0),
\end{aligned}$$

wobei $\tau \in [t_0,t]$ und $x_\theta \in \overline{xx_0}$.
Daraus folgt für $\varphi_0(u) \equiv 0$:

$$|u(p)| \leq [D^{2m,1}u]_\alpha d(p,0)^{2m+\alpha} \leq c\rho^{2m+\alpha}[D^{2m,1}u]_\alpha \quad \text{für } \forall \ p \in U_\rho(0)$$

Da $D^{2m,1}u(0) = 0$ hat man weiter:

$$|D^{2m,1}u(p)| \leq [D^{2m,1}u]_\alpha d(p,0)^\alpha$$

Jetzt sollen alle anderen Ableitungen mit Ordnung $< 2m$ abgeschätzt werden.

Lemma 2.3.3. *Sei $u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{U}_\rho(0),\mathbb{R}^N)$ mit $\varphi_0(u) \equiv 0$, dann gilt:*

(1) $||u||_{L^\infty(U_\rho)} + \rho||\nabla u||_{L^\infty(U_\rho)} + \dots + \rho^{2m}||D^{2m,1}u||_{L^\infty(U_\rho)} \leq c[D^{2m,1}u]_{\alpha,U_{2\rho}}\rho^{2m+\alpha}$

(2) $[u]_{\alpha,U_\rho} + \rho[\nabla u]_{\alpha,U_\rho} + \dots + \rho^{2m-1}[\nabla^{2m-1}u]_{\alpha,U_\rho} \leq c[D^{2m,1}u]_{\alpha,U_{2\rho}}\rho^{2m}$

Beweis:
Zeige (1) für den Fall $m = 1$:

Die Zeitkoordinate kann hier unberücksichtigt bleiben, da lediglich die L^∞-Norm von ∇u abgeschätzt werden muß. Sei also $u \in C^{2,\alpha}(B_\rho(0))$. Es gilt mit Hilfe des Mittelwertsatzes (dabei sei hier und im Folgenden mit Anwendung des Mittelwertsatzes immer die komponentenweise Anwendung gemeint, ebenso bei der Anwendung des Gaußschen Satzes):

$$\begin{aligned}
|\nabla u(x) - \fint_{B_\rho} \nabla u(y)dy| &= |\fint_{B_\rho} (\nabla u(x) - \nabla u(y))dy| \\
&\leq c\rho||\nabla^2 u||_{L^\infty(B_\rho)}
\end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
|\fint_{B_\rho} \nabla u(y)dy| &= \frac{1}{\alpha_n\rho^n}|\int_{\partial B_\rho} u\nu dH^{n-1}| \\
&\leq \frac{c}{\rho}||u||_{L^\infty(B_\rho)}
\end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt:

$$||\nabla u||_{L^\infty(B_\rho)} \leq \frac{c}{\rho}||u||_{L^\infty(B_\rho)} + c\rho||\nabla^2 u||_{L^\infty(B_\rho)}$$

Dies impliziert die Behauptung für $m = 1$.

Im allgemeinen Fall kann durch Skalierung erreicht werden, daß die Abschätzung nur auf $U_1(0)$ bewiesen werden muß. Dazu wird die für den Fall $m = 1$ nachgewiesene Abschätzung nacheinander auf $\nabla^{2m-1}u, \ldots, \nabla u$ auf immer kleiner werdenden ϵ-Abstandsbällen benutzt. Die Behauptung folgt durch das Zusammensetzen der einzelnen Abschätzungen, Verschlucken der Terme mit Ableitungsordnung zwischen 1 und $2m - 1$ und durch ein Überdeckungsargument.

Zeige (2) für $m = 1$:

Aus dem Mittelwertsatz und (1) folgt:

$$\begin{aligned}
|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| &\leq c||\nabla u||_{L^\infty(U_\rho)}|x_1 - x_2| + c||\partial_t u||_{L^\infty(U_\rho)}|t_1 - t_2| \\
&\leq c[D^{2,1}u]_{\alpha,U_{2\rho}}(\rho^{1+\alpha}|x_1 - x_2| + \rho^\alpha|t_1 - t_2|) \\
&\leq c[D^{2,1}u]_{\alpha,U_{2\rho}}\rho^2 d((x_1, t_1), (x_2, t_2))^\alpha
\end{aligned}$$

Die Abschätzung des Gradienten erfolgt durch Interpolation:

$$\begin{aligned}
\nabla u(x, t_1) - \nabla u(x, t_2) &= \fint_{B_\rho(0)} (\nabla u(\zeta, t_1) - \nabla u(\zeta, t_2))d\zeta \\
&+ \fint_{B_\rho(0)} (\nabla u(x, t_1) - \nabla u(\zeta, t_1))d\zeta \\
&- \fint_{B_\rho(0)} (\nabla u(x, t_2) - \nabla u(\zeta, t_2))d\zeta \\
&= \frac{1}{\alpha_n\rho^n} \int_{\partial B_\rho(0)} (u(\zeta, t_1) - u(\zeta, t_2))\nu dH^{n-1} \\
&+ \fint_{B_\rho(0)} \int_0^1 (\nabla^2 u(sx + (1 - s)\zeta, t_1) \\
&- \nabla^2 u(sx + (1 - s)\zeta, t_2))ds(x - \zeta)d\zeta
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
|\nabla u(x, t_1) - \nabla u(x, t_2)| &\leq \frac{c}{\rho}[D^{2,1}u]_{\alpha,U_{2\rho}}\rho^2|t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}} \\
&+ c[D^{2,1}u]_{\alpha,U_{2\rho}}\rho|t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt mit Hilfe des Mittelwertsatzes und $|x_1 - x_2|^{1-\alpha} \leq c\rho^{1-\alpha}$:

$$\begin{aligned}
|\nabla u(x_1, t) - \nabla u(x_2, t)| &\leq c||\nabla^2 u||_{L^\infty(U_\rho)}|x_1 - x_2| \\
&\leq c[D^{2,1}u]_{\alpha,U_{2\rho}}\rho^\alpha|x_1 - x_2| \\
&\leq c[D^{2,1}u]_{\alpha,U_{2\rho}}\rho|x_1 - x_2|^\alpha
\end{aligned}$$

Zusammen liefert dies die Aussage für den Fall $m = 1$.

Im allgemeinen Fall wird analog zum Beweis von (1) argumentiert.

□

Jetzt werden Interpolationsabschätzungen bewiesen, welche später u.a. dazu verwendet werden, die Schauderabschätzungen aus Abschätzungen an die höchste Höldernorm zu erhalten.

Lemma 2.3.4 (Interpolationsabschätzungen). *Zu $\epsilon > 0$ existiert eine Konstante $c = c(n, N, \epsilon, \alpha, m)$, so daß für $u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{U}_\rho(0))$ gilt:*

$$\begin{aligned}\rho^\alpha [u]_{\alpha,U_\rho} &+ \rho||\nabla u||_{L^\infty(U_\rho)} + \ldots + \rho^{2m-1+\alpha}[\nabla^{2m-1}u]_{\alpha,U_\rho} + \rho^{2m}||D^{2m,1}u||_{L^\infty(U_\rho)} \\ &\leq \epsilon\rho^{2m+\alpha}[D^{2m,1}u]_{\alpha,U_\rho} + c||u||_{L^\infty(U_\rho)}\end{aligned}$$

Beweis:

Induktionsanfang:

Durch Skalierung reicht es ohne Einschränkung die Aussage für $\rho = 1$ zu zeigen.
Zunächst soll die L^∞-Norm von ∇u abgeschätzt werden. Sei $x \in B_\sigma(x_0) \subset B_1(0)$, dann gilt fi£¡r $0 < \beta \leq 1$:

$$\begin{aligned}\nabla u(x) &= \fint_{B_\sigma(x_0)} \nabla u(\zeta)d\zeta + \fint_{B_\sigma(x_0)} (\nabla u(x) - \nabla u(\zeta))d\zeta \\ &= \frac{c}{\sigma}\fint_{\partial B_\sigma(x_0)} u(\zeta)\nu dH^{n-1} + [\nabla u]_{\beta,B_\sigma(x_0)}c\sigma^\beta\end{aligned}$$

Damit folgt mit $\beta = 1$:

$$||\nabla u||_{L^\infty} \leq c\sigma||\nabla^2 u||_{L^\infty} + \frac{c}{\sigma}||u||_{L^\infty}$$

Weiter folgt mit $\beta = \alpha$, ∇u für u und δ für σ:

$$\begin{aligned}||\nabla^2 u||_{L^\infty} &\leq c\delta^\alpha[\nabla^2 u]_\alpha + \frac{c}{\delta}||\nabla u||_{L^\infty} \\ &\leq c\delta^\alpha[\nabla^2 u]_\alpha + \frac{c}{\delta}(c\sigma||\nabla^2 u||_{L^\infty} + \frac{c}{\sigma}||u||_{L^\infty})\end{aligned}$$

Durch geeignete Wahl von δ und Verschlucken erhält man:

(1) $||\nabla^2 u||_{L^\infty} \leq c\sigma^\alpha[\nabla^2 u]_\alpha + \frac{c}{\sigma^2}||u||_{L^\infty}$

Nach Einsetzen gilt:

(2) $||\nabla u||_{L^\infty} \leq c\sigma^{1+\alpha}[\nabla^2 u]_\alpha + \frac{c}{\sigma}||u||_{L^\infty}$

Nun folgt die L^∞-Norm der Zeitableitung:

$$(\partial_t u)(t) = \fint_{t_0-\sigma^2}^{t_0+\sigma^2} (\partial_t u)(\tau)d\tau + \fint_{t_0-\sigma^2}^{t_0+\sigma^2} (\partial_t u(t) - \partial_t u(\tau))d\tau$$

Und damit:

(3) $||\partial_t u||_{L^\infty} \leq c\sigma^\alpha[\partial_t u]_\alpha + \frac{c}{\sigma^2}||u||_{L^\infty}$

Es folgt die Abschätzung von $[u]_\alpha$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes. Sei dazu $p = (x,t)$ und $q = (y,s)$.

$$\begin{aligned} |u(p) - u(q)| &\leq ||\nabla u||_{L^\infty}|x-y| + ||\partial_t u||_{L^\infty}|t-s| \\ &\leq (|x-y|^{1-\alpha}||\nabla u||_{L^\infty} + |t-s|^{1-\frac{\alpha}{2}}||\partial_t u||_{L^\infty})d(p,q)^\alpha \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \frac{|u(p)-u(q)|}{d(p,q)^\alpha} &\leq |x-y|^{1-\alpha}(c\sigma^{1+\alpha}[\nabla^2 u]_\alpha + \frac{c}{\sigma}||u||_{L^\infty}) \\ &+ |t-s|^{1-\frac{\alpha}{2}}(c\sigma^\alpha[\partial_t u]_\alpha + \frac{c}{\sigma^2}||u||_{L^\infty}) \end{aligned}$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) $d(p,q) \geq \sigma$

2) $d(p,q) < \sigma$

Im Fall 1) gilt:

$$\frac{|u(p)-u(q)|}{d(p,q)^\alpha} \leq 2\sigma^{-\alpha}||u||_{L^\infty}$$

Im Fall 2) gilt:

$$\frac{|u(p)-u(q)|}{d(p,q)^\alpha} \leq c\sigma^2[\nabla^2 u]_\alpha + c\sigma^2[\partial_t u]_\alpha + c\sigma^{-\alpha}||u||_{L^\infty}$$

Insgesamt erhält man also:

(4) $[u]_\alpha \leq c\sigma^2[D^{2,1}u]_\alpha + c\sigma^{-\alpha}||u||_{L^\infty}$

Nun zur Abschätzung von $[\nabla u]_\alpha$:
Wie oben gilt mit $d(p,q) \geq \sigma$:

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla u(p) - \nabla u(q)|}{d(p,q)^\alpha} &\leq 2\sigma^{-\alpha}||\nabla u||_{L^\infty} \\ &\leq 2\sigma^{-\alpha}(c\sigma^{1+\alpha}[\nabla^2 u]_\alpha + \frac{c}{\sigma}||u||_{L^\infty}) \\ &= c\sigma[\nabla^2 u]_\alpha + \frac{c}{\sigma^{1+\alpha}}||u||_{L^\infty} \end{aligned}$$

Aus dem Mittelwertsatz folgt für $|x-y| \leq \sigma$:

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla u(x,t) - \nabla u(y,t)|}{|x-y|^\alpha} &\leq c\sigma^{1-\alpha}||\nabla^2 u||_{L^\infty} \\ &\leq c\sigma[\nabla^2 u]_\alpha + \frac{c}{\sigma^{1+\alpha}}||u||_{L^\infty} \end{aligned}$$

Schließlich gilt für $|t-s|^{\frac{1}{2}} \leq \sigma$ und $x \in B_\sigma(x_0) \subset B_1(0)$:

$$\begin{aligned}
\nabla u(x,t) - \nabla u(x,s) &= \fint_{B_\sigma} (\nabla u(\zeta,t) - \nabla u(\zeta,s)) d\zeta \\
&+ \fint_{B_\sigma} (\nabla u(x,t) - \nabla u(\zeta,t)) d\zeta \\
&- \fint_{B_\sigma} (\nabla u(x,s) - \nabla u(\zeta,s)) d\zeta \\
&= \frac{c}{\sigma} \fint_{\partial B_\sigma} (u(\zeta,t) - u(\zeta,s)) \nu dH^{n-1} \\
&+ \fint_{B_\sigma} \int_0^1 (\nabla^2 u(\lambda x + (1-\lambda)\zeta, t) \\
&- \nabla^2 u(\lambda x + (1-\lambda)\zeta, s))(x-\zeta) d\lambda d\zeta
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{|\nabla u(x,t) - \nabla u(x,s)|}{|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}} &\leq \frac{c}{\sigma}[u]_\alpha + c\sigma[\nabla^2 u]_\alpha \\
&\leq c\sigma[D^{2,1}u]_\alpha + \frac{c}{\sigma^{1+\alpha}}||u||_{L^\infty}
\end{aligned}$$

Also erhält man:

(5) $[\nabla u]_\alpha \leq c\sigma[D^{2,1}u]_\alpha + \frac{c}{\sigma^{1+\alpha}}||u||_{L^\infty}$

Dies ist die Behauptung, falls σ klein genug gewählt wird.

Induktionsschluß:

Man wende die Induktionsvoraussetzung auf die Funktion $\nabla^2 u$ an und erhält:

$$\begin{aligned}
\rho^\alpha[\nabla^2 u]_\alpha &+ \rho||\nabla^3 u||_{L^\infty} + \ldots + \rho^{2m}||D^{2m+2,1}u||_{L^\infty} \\
&\leq \epsilon\rho^{2m+\alpha}[D^{2m+2,1}u]_\alpha + c||\nabla^2 u||_{L^\infty}
\end{aligned}$$

Die Terme niedrigerer Ordnung und den zweiten Term auf der rechten Seite schätzt man mit Hilfe des Induktionsanfangs und anschließendem Verschlucken ab.

□

Bemerkung 2.3.5. *Die Aussagen von Lemma (*2.3.3*) und (*2.3.4*) bleiben auch gültig, wenn man anstelle von $U_\rho(0)$ die abgeschnittenen Bälle*

$U^+_\rho(0) := B_\rho(0) \times (0, \rho^{2m})$

$U^{++}_\rho(0) := B^+_\rho(0) \times (-\rho^{2m}, \rho^{2m})$

$U^{+++}_\rho(0) := B^+_\rho(0) \times (0, \rho^{2m})$

betrachtet.

Das folgende Lemma sowie dessen Beweis sind aus der Arbeit von L. Simon [Sim97] entnommen.

Lemma 2.3.6 (Absorptionslemma). *Sei S eine monotone subadditive Funktion auf den konvexen Teilmengen von $B = B_{\rho_0}(y_0)$ (d.h. $S(A) \leq \sum_{j=1}^N S(A_j)$, falls A, A_1, …, A_N konvexe Teilmengen von B sind und $A \subset \cup_{j=1}^N A_j$) und seien $\Theta_0 \in (0, \frac{1}{2})$ und $k > 0$ gegebene Konstanten. Dann existiert ein $\epsilon = \epsilon(\Theta_0, k) \in (0,1)$, so daß gilt: Falls $E \geq 0$ eine Konstante ist und*

$$\sigma^k S(B_{\Theta_0 \sigma}(y)) \leq \epsilon \sigma^k S(B_\sigma(y)) + E$$

für alle Bälle $B_\sigma(y) \subset B$, dann gilt für jeden Ball $B_\rho(y) \subset B$ und jedes $\Theta \in (0,1)$:

$$\rho^k S(B_{\Theta\rho}(y)) \leq cE,$$

wobei $c = c(n, \Theta_0, \Theta, k)$.

Beweis:
Es reicht das Lemma im Spezialfall $\Theta = \frac{1}{2}$ zu zeigen, denn für jedes $\Theta \in (\frac{1}{2}, 1)$ und für jeden Ball $B_\rho(y) \subset B$ findet man Bälle $B_{(1-\Theta)\rho}(y_j) \subset B_\rho(y)$, $j = 1, \ldots, N$, mit $N = N(n, \Theta)$ und $B_{\Theta\rho}(y) \subset \cup_{j=1}^N B_{(1-\Theta)\rho}(y_j)$.
Sei also $\Theta = \frac{1}{2}$ und sei

$$Q := \sup_{B_\sigma(y) \subset B} \sigma^k S(B_{\frac{\sigma}{2}}(y)) < \infty$$

Man hat für jeden Ball $B_\sigma(y) \subset B$:

(1) $2^{-k}\sigma^k S(B_{\Theta_0 \frac{\sigma}{2}}(y) \leq \epsilon Q + E$

Man nimmt nun einen Ball $B_\sigma(y) \subset B$ und wählt Punkte $y_j \in B_{\frac{\sigma}{2}}(y)$, so daß $B_{\frac{\sigma}{2}}(y) \subset \cup_{j=1}^N B_{\Theta_0 \frac{\sigma}{4}}(y_j)$ und $N \leq c$, wobei c eine Konstante ist, die nur von Θ_0 und n abhängt. Da jeder Ball $B_{\frac{\sigma}{2}}(y_j) \subset B$, kann (1) auf $B_{\frac{\sigma}{2}}(y_j)$ anstelle von $B_\sigma(y)$ angewendet werden und mit der Subadditivität von S erhält man:

$$\sigma^k S(B_{\frac{\sigma}{2}}(y)) \leq c(\epsilon Q + E)$$

mit $c = c(n, k, \Theta_0)$.
Da $B_\sigma(y)$ beliebig, folgt daraus:

$$Q \leq c\epsilon Q + cE$$

mit c wie oben.
Falls nun $\epsilon < \frac{1}{2c}$, gilt:

$$Q \leq 2cE$$

Also speziell:

$$\sigma^k S(B_{\frac{\sigma}{2}}(y)) \leq 2cE$$

Dies ist gerade die Aussage.

□

Als ersten Schritt auf dem Weg zur globalen Schauderabschätzung betrachtet man den randlosen Fall:

Lemma 2.3.7. *Sei $Hu = \partial_t u + \sum_{|\alpha|=2m} a^\alpha D_\alpha u$ ein parabolischer Operator mit konstanten Koeffizienten und sei $u \in C^{2m,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ eine Ganzraumlï£¡sung von $Hu = 0$. Es gelte zusï£¡tzlich $|u(p)| \leq cd(p,0)^{2m+\alpha}$ fï£¡r $d(p,0) \gg 1$ mit $0 < \alpha < 1$, dann gilt:*

$$u \textit{ ist ein Polynom der Ordnung} \leq (2m, 1)$$

Beweis:
Aus den in Ort und Zeit lokalisierten parabolischen L^2-Abschätzungen (Satz (2.2.6)) erhält man:

$$||D^{j,k}u||_{L^2(U_1)} \leq c||u||_{L^2(U_2)} \quad \forall \quad j, k \in \mathbb{N}_0$$

Damit folgt aus dem Sobolevschen Einbettungssatz (siehe [Alt99]):

$$||D^{j,k}u||_{L^\infty(U_1)} \leq c||u||_{L^2(U_2)} \quad \forall \quad j, k \in \mathbb{N}_0$$

Nun wird die Funktion u parabolisch skaliert:

$$u_R(x,t) := u(Rx, R^{2m}t)$$

Damit erhält man für R groß genug:

$$||D^{j,k}u_R||_{L^\infty(U_1)} = R^{j+2mk}||D^{j,k}u||_{L^\infty(U_R)}$$

$$||u_R||_{L^2(U_2)} \leq cR^{2m+\alpha}\mathcal{L}^{n+1}(U_2) \leq cR^{2m+\alpha}$$

Insgesamt folgt:

$$||D^{j,k}u||_{L^\infty(U_R)} \leq cR^{2m+\alpha-j-2mk}$$

Dies konvergiert gegen 0 für $R \to \infty$, falls $j + 2mk \geq 2m + 1$, d.h.

$$\partial_t^2 u = 0, \ldots, \nabla\partial_t u = 0, \ldots, \nabla^{2m+1}u = 0, \ldots \quad .$$

Dies ist die Behauptung.

$\square$

Lemma 2.3.8 (Hï£¡lderabschï£¡tzung fï£¡r Ganzraumlï£¡sungen)**.** *Sei* $Hu = \partial_t u + \sum_{|\alpha|=2m} a^\alpha D_\alpha u$ *ein parabolischer Operator mit konstanten Koeffizienten. Dann gilt fï£¡r* $u \in C^{2m,1,\alpha}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ *mit* $0 < \alpha < 1$*:*

$$[D^{2m,1}u]_\alpha \leq c[Hu]_\alpha,$$

wobei $c = c(\alpha, n, N, H)$*.*

Beweis:
Der Beweis wird durch Widerspruch gefï£¡hrt.
<u>Annahme:</u>

$$\exists \quad H_k = \partial_t + \sum_{|\alpha|=2m} a_k^\alpha D_\alpha$$

mit $a_k^\alpha \to a^\alpha$ und denselben Eigenschaften wie H. Zusätzlich existiere

$$u_k \in C^{2m,1,\alpha}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

mit:

$$[H_k u_k]_\alpha \leq \frac{1}{k}[D^{2m,1}u_k]_\alpha$$

Sei λ =const., dann gilt:

$$[D^{2m,1}(\lambda u)]_\alpha = \lambda[D^{2m,1}u]_\alpha$$

Also kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß

$$[D^{2m,1}u_k]_\alpha = 1.$$

$\Rightarrow \exists\ p_k, q_k \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit:

$$|D^{2m,1}u_k(p_k) - D^{2m,1}u_k(q_k)| \geq \frac{1}{2}d(p_k, q_k)^\alpha$$

Durch Translation kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß

$$q_k = 0.$$

Definiere nun $\lambda_k := d(p_k, 0)$, $\sigma_{\lambda_k}(x,t) := (\lambda_k x, \lambda_k^{2m} t)$ und $v_k := \lambda_k^{-2m-\alpha} u_k \circ \sigma_{\lambda_k}$

$$\Rightarrow \quad v_k(x,t) = \lambda_k^{-2m-\alpha} u_k(\lambda_k x, \lambda_k^{2m} t)$$

Nach Definition von v_k und der Hölderhalbnorm gilt:

$$\begin{aligned}[D^{2m,1}v_k]_\alpha &= [\nabla^{2m}v_k]_\alpha + [\partial_t v_k]_\alpha \\ &= [\nabla^{2m}u_k]_\alpha + [\partial_t u_k]_\alpha \\ &= [D^{2m,1}u_k]_\alpha \\ &= 1\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$|D^{2m,1}v_k(\sigma_{\frac{1}{\lambda_k}} p_k) - D^{2m,1}v_k(0)| \geq \frac{1}{2}$$

und

$$[H_k v_k]_\alpha \leq \frac{1}{k}$$

Definiere nun $\tilde{v}_k := v_k - \varphi_0(v_k)$.

$$\Rightarrow \quad \tilde{v}_k \in C^{2m,1,\alpha}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

Da $\varphi_0(v_k)$ ein Polynom $2m$-ter Ordnung im Raum und erster Ordnung in der Zeit ist, gilt:

$$H_k \varphi_0(v_k) = c$$

Damit erhält man:

$$[H_k \tilde{v}_k]_\alpha = [H_k v_k]_\alpha \leq \tfrac{1}{k}$$

$$[D^{2m,1}\tilde{v}_k]_\alpha = [D^{2m,1}v_k]_\alpha = 1$$

$$D^{2m,1}\tilde{v}_k(0) = 0$$

$$|D^{2m,1}\tilde{v}_k(\sigma_{\frac{1}{\lambda_k}} p_k)| \geq \tfrac{1}{2}$$

$$\varphi_0(\tilde{v}_k) = \varphi_0(v_k) - \varphi_0(v_k) = 0$$

Aus Lemma (2.3.3) folgt, daß $\tilde{v}_k$, $\nabla\tilde{v}_k$, ..., $D^{2m,1}\tilde{v}_k$ lokal beschränkt und lokal α-hölderstetig sind. Daraus folgt:

$$\tilde{v}_k \to v \quad \text{lokal in} \;\; C^{2m,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

mit $v \in C^{2m,1,\alpha}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.
Ohne Einschränkung kann weiter angenommen werden, daß $\sigma_{\frac{1}{\lambda_k}} p_k \to p$ mit $d(p, 0) = 1$, da $d(\sigma_{\frac{1}{\lambda_k}} p_k, 0) = 1$. Damit gilt für v :

$$[Hv]_\alpha = 0$$

$$[D^{2m,1}v]_\alpha \leq 1$$

$$D^{2m,1}v(0) = 0$$

$$|D^{2m,1}v(p)| \neq 0$$

$$\varphi_0(v) = 0$$

Aus $[Hv]_\alpha = 0$ folgt nach Definition Hv =const.
Zusätzlich gilt:

$$H\tilde{v}_k(0) = Hv_k(0) - H(\varphi_0(v_k))(0) = 0 \;\; \forall \;\; k$$

Also:

$$Hv(0) = \lim_{k\to\infty} H\tilde{v}_k(0) = 0$$

d.h. $Hv \equiv 0$.
Und damit folgt schließlich aus Lemma (2.3.7):

$$v \text{ ist ein Polynom der Ordnung } \leq (2m, 1)$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu $D^{2m,1}v(p) \neq D^{2m,1}v(0) = 0$.

□

Lemma 2.3.9 (Lokale Hölderabschätzung)**.** *Sei H ein parabolischer Operator mit konstanten Koeffizienten und sei $u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{U}_\rho(0))$, dann gilt für alle $\Theta \in (0, 1)$:*

$$[D^{2m,1}u]_{\alpha, U_{\Theta\rho}(0)} \leq c([Hu]_{\alpha, U_\rho(0)} + \rho^{-2m-\alpha}||u||_{L^\infty(U_\rho(0))})$$

Beweis:
1.Beh.: $\forall\ \sigma, \epsilon > 0$, $(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\ \exists\ \delta = \delta(\epsilon) \in (0, 1)$, $c = c(\epsilon)$:

(1) $[D^{2m,1}u]_{\alpha, U_{\sigma\delta}(y,s)} \leq \epsilon[D^{2m,1}u]_{\alpha, U_\sigma(y,s)} + c[Hu]_{\alpha, U_\sigma(y,s)}$

für $u \in C^{2m,1,\alpha}(U_\sigma(y, s))$

Beweis:
Translatiere und skaliere:

$$(x, t) \to (\frac{1}{\sigma\delta}(x - y), \frac{1}{(\sigma\delta)^{2m}}(t - s))$$

Angenommen die Aussage (1) sei falsch für ein $\epsilon > 0$, dann existieren $u_k \in C^{2m,1,\alpha}(U_k(0))$ und H_k mit den selben Eigenschaften wie H, so daß gilt:

$$\epsilon[D^{2m,1}u_k]_{\alpha,U_k(0)} + k[H_k u_k]_{\alpha,U_k(0)} \leq [D^{2m,1}u_k]_{\alpha,U_1(0)},$$

o.E. gelte wieder $[D^{2m,1}u_k]_{\alpha,U_1(0)} = 1$.

$$\Rightarrow [D^{2m,1}u_k]_{\alpha,U_k(0)} \leq c,$$

wobei c unabhängig von k ist.
Nun kann dasselbe Argument wie im vorangegangenen Beweis angewendet werden, nur werden diesesmal p_k, q_k aus $U_1(0)$ gewählt. Nach Grenzübergang $k \to \infty$ erhält man jedoch wieder eine Ganzraumlösung und der Rest des Arguments aus dem Beweis von Lemma (2.3.8) überträgt sich auf diesen Fall.

2.Beh.: Aus (1) folgt

(2) $[D^{2m,1}u]_{\alpha,U_{\Theta\sigma}(y,s)} \leq \epsilon[D^{2m,1}u]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} + c([Hu]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} + \sigma^{-2m-\alpha}||u||_{L^\infty(U_\sigma(y,s))})$

$\forall\ \Theta \in (0,1)$, $\forall\ U_\sigma(y,s) \subset U_\rho(0)$ mit $c = c(\epsilon, \Theta)$

Beweis:
Betrachte den Differenzenquotienten

$$h^{-\alpha}|D^{2m,1}u(x_1,t_1) - D^{2m,1}u(x_2,t_2)|,$$

wobei $(x_1,t_1) \in U_{\Theta\sigma}(y,s)$, $d((x_1,t_1),(x_2,t_2)) = h$. Unterscheide zwei Fälle:
Fall 1): $0 < h < \delta(1-\Theta)\sigma$
Es folgt direkt aus (1):

$$\begin{aligned} h^{-\alpha}|D^{2m,1}u(x_1,t_1) - D^{2m,1}u(x_2,t_2)| &\leq [D^{2m,1}u]_{\alpha,U_{\delta(1-\Theta)\sigma}(x_1,t_1)} \\ &\leq \epsilon[D^{2m,1}u]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} + c[Hu]_{\alpha,U_{\sigma(y,s)}} \end{aligned}$$

Fall 2): $h > \delta(1-\Theta)\sigma$
Es folgt durch Interpolation (Lemma (2.3.4)):

$$\begin{aligned} h^{-\alpha}|D^{2m,1}u(x_1,t_1) - D^{2m,1}u(x_2,t_2)| &\leq 2(\delta(1-\Theta)\sigma)^{-\alpha}||D^{2m,1}u||_{L^\infty(U_\sigma(y,s))} \\ &\leq \epsilon[D^{2m,1}u]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} \\ &+ c(\epsilon,\Theta)\sigma^{-2m-\alpha}||u||_{L^\infty(U_\sigma(y,s))} \end{aligned}$$

Wende nun auf (2) Lemma (2.3.6) mit $S(A) = [D^{2m,1}u]_{\alpha,A}$, $k = 2m+\alpha$ und $E = C(\rho^{2m+\alpha}[Hu]_{\alpha,U_\rho(0)} + ||u||_{L^\infty(U_\rho(0))})$ an. Dann folgt die Behauptung.

□

Satz 2.3.10 (Innere Schauderabschätzung). *Sei $L = \partial_t + \sum_{|\beta|\leq 2m} a^\beta D_\beta$ ein parabolischer Differentialoperator auf $U_R(0)$ mit*

$$\sum_{|\beta|\leq 2m} R^{2m-|\beta|}||a^\beta||_{L^\infty(U_R(0))} + \sum_{|\beta|\leq 2m} R^{2m-|\beta|+\alpha}[a^\beta]_{\alpha,U_R(0)} \leq M.$$

Dann gilt für $u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{U}_R(0))$*:*

$$[D^{2m,1}u]_{\alpha,U_{\Theta R}(0)} \leq c([Lu]_{\alpha,U_R(0)} + R^{-2m-\alpha}||u||_{L^\infty(U_R(0))})$$

für alle $\Theta \in (0,1)$ *und* $c = c(n,N,\Theta,M,L)$.

Beweis:
Zerlege L für alle $(y,s) \in U_R(0)$, alle $\sigma \in (0,R)$, so daß $U_\sigma(y,s) \subset U_R(0)$ in

$$L = P_y + R_y,$$

wobei

$$P_y = \partial_t + \textstyle\sum_{|\beta|=2m} a^\beta(y,s)D_\beta$$

$$R_y = \textstyle\sum_{|\beta|=2m}(a^\beta - a^\beta(y,s))D_\beta + \sum_{|\beta|<2m} a^\beta D_\beta.$$

Unter Berücksichtigung von:

$$[v+w]_\alpha \leq [v]_\alpha + [w]_\alpha$$

$$[vw]_\alpha \leq ||v||_{L^\infty}[w]_\alpha + [v]_\alpha||w||_{L^\infty}$$

kann R_y folgendermaßen abgeschätzt werden:
Für alle $\eta \in (0,1)$, $u \in C^{2m,1,\alpha}(U_\sigma(y,s))$ und $\sigma \leq \eta R$ gilt:

$$\begin{aligned} [R_y u]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} &\leq cM\eta^\alpha[D^{2m}u]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} + \frac{cM}{\sigma^\alpha}||D^{2m}u||_{L^\infty(U_\sigma(y,s))} \\ &+ cM\sum_{|\beta|<2m}\sigma^{-2m-\alpha+|\beta|}\sup_{U_\sigma(y,s)}|D_\beta u| \\ &+ cM\sum_{|\beta|<2m}\sigma^{-2m+|\beta|}[D_\beta u]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} \end{aligned}$$

Durch Interpolation (Lemma (2.3.4)) wird fi£¡r η klein genug weiter abgeschätzt:

$$\begin{aligned} [R_y u]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} &\leq c\eta^\alpha[D^{2m,1}u]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} + \epsilon[D^{2m,1}u]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} \\ &+ c\sigma^{-2m-\alpha}||u||_{L^\infty(U_\sigma(y,s))} \\ &\leq \epsilon[D^{2m,1}u]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} + c\sigma^{-2m-\alpha}||u||_{L^\infty(U_\sigma(y,s))} \end{aligned}$$

Nun wird Lemma (2.3.9) auf P_y angewendet:

$$[D^{2m,1}u]_{\alpha,U_{\frac{\sigma}{2}}(y,s)} \leq c([P_y u]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} + \sigma^{-2m-\alpha}||u||_{L^\infty(U_\sigma(y,s))})$$

Aus $P_y = L - R_y$ folgt:

$$[P_y u]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} \leq [Lu]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} + [R_y u]_{\alpha,U_\sigma(y,s)}$$

Und damit:

$$\begin{aligned} [D^{2m,1}u]_{\alpha,U_{\frac{\sigma}{2}}(y,s)} &\leq \epsilon[D^{2m,1}u]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} + c([Lu]_{\alpha,U_\sigma(y,s)} \\ &+ \sigma^{-2m-\alpha}||u||_{L^\infty(U_\sigma(y,s))}) \end{aligned}$$

Nun folgt analog zum Beweis von Lemma(2.3.9) aus Lemma (2.3.6) die Behauptung.

□

Es folgen analoge Abschätzungen für das Cauchyproblem.

Lemma 2.3.11. *Sei* $H = \partial_t + \sum_{|\alpha|=2m} a^\alpha D_\alpha$ *mit konstanten Koeffizienten,* $u \in C^{2m,1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ *mit* $Hu = 0$ *und* $|u(p)| \leq cd(p,0)^{2m+\alpha}$ *für* $d(p,0) \gg 1$ *sowie* $u(\cdot,0) = u_0$*, wobei* u_0 *ein Polynom höchstens* $2m$*-ter Ordnung ist, dann gilt:*

$$u \text{ ist ein Polynom der Ordnung} \leq (2m,1)$$

Beweis:
Betrachte

$$v(x,t) := u(x,t) - u_0(x) + t\tilde{H}(u_0(x)),$$

wobei $\tilde{H} := H - \partial_t$. Dann erfüllt v die Voraussetzungen des Lemmas, denn:

$$v \in C^{2m,1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)),$$

$$Hv = Hu - Hu_0 + H(t\tilde{H}u_0) = 0,$$

$$|v(p)| \leq cd(p,0)^{2m+\alpha} \text{ für } d(p,0) \gg 1,$$

$$v(\cdot,0) = 0$$

Wenn die Aussage für v gezeigt ist, gilt sie auch für u. Um die Aussage für v zu beweisen, argumentiert man analog zu Lemma (2.3.7) mit dem Unterschied, daß anstelle der in Ort und Zeit lokalisierten L^2-Abschätzung die nur im Ort lokalisierte Abschätzung (Satz (2.2.5)) verwendet wird und die ganzen Abschätzungen auf in der Zeit abgeschnittenen Bällen $U_R^+(0) := B_R(0) \times (0, R^{2m})$ betrachtet werden.

□

Lemma 2.3.12 (Hölderabschätzung für das Cauchyproblem)**.** *Sei* $H = \partial_t + \sum_{|\alpha|=2m} a^\alpha D_\alpha$ *mit konstanten Koeffizienten. Sei* $u \in C^{2m,1,\alpha}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty), \mathbb{R}^N)$ *mit* $u(\cdot,0) = u_0$*, dann gilt:*

$$[D^{2m,1}u]_{\alpha,\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} \leq c([Hu]_{\alpha,\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} + [\nabla^{2m}u_0]_{\alpha,\mathbb{R}^n})$$

Beweis:
Das Beweisprinzip verläuft analog zu demjenigen von Lemma (2.3.8) mit dem Unterschied, daß ein Zeitrandterm hinzukommt. Es werden hier noch einmal die entscheidenden Schritte erläutert. Der Beweis wird durch Widerspruch geführt.
Annahme: Es existiert eine Folge von Operatoren H_k und eine Folge von Abbildungen u_k, so daß gilt:

$$[D^{2m,1}u_k]_{\alpha,\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} = 1, \quad [H_k u_k]_{\alpha,\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} \leq \frac{1}{k}, \quad [\nabla^{2m}u_{0,k}]_{\alpha,\mathbb{R}^n} \leq \frac{1}{k}$$

Also existieren Punkte $p_k, q_k \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ mit

$$|D^{2m,1}u_k(p_k) - D^{2m,1}u_k(q_k)| \geq \frac{1}{2}d(p_k,q_k)^\alpha.$$

Sei nun $p_k = (x_k, s_k)$ und $q_k = (y_k, t_k)$, wobei ohne Einschränkung $s_x \geq t_k$ gelten soll. Dann definiere $\lambda_k := d(p_k, q_k)$ und unterscheide zwei Fälle:

1. Fall: $\liminf_{k\to\infty} \frac{-t_k}{\lambda_k^{2m}} = -\infty$
Definiere:

$$v_k(p) := \lambda^{-2m-\alpha} u_k(q_k + \sigma_{\lambda_k} p)$$

$\Rightarrow \quad v_k \in C^{2m,1,\alpha}(\mathbb{R}^n \times [\frac{-t_k}{\lambda_k^{2m}}, \infty), \mathbb{R}^N)$
Nun verfährt man analog zu Lemma (2.3.8) und erhält nach dem Grenzübergang eine Ganzraumlösung und damit den gewünschten Widerspruch.

2. Fall: $\frac{-t_k}{\lambda_k^{2m}} \to \tau \leq 0$ nach Wahl einer Teilfolge
Definiere analog zum 1. Fall die Funktion v_k und wie in Lemma (2.3.8) die Funktion $\tilde{v}_k$. Nach Grenzübergang $k \to \infty$ und mit $v := \lim_{k\to\infty} \tilde{v}_k$ folgt weiter:

$$v \in C^{2m,1,\alpha}(\mathbb{R}^n \times [\tau, \infty), \mathbb{R}^N)$$

$$Hv \equiv 0$$

$$\varphi_0(v) = 0$$

$$D^{2m,1}v(p) \neq D^{2m,1}v(0)$$

$$[\nabla^{2m} v(\cdot, \tau)]_{\alpha,\mathbb{R}^n} = 0$$

$$[D^{2m,1}v]_{\alpha,\mathbb{R}^n\times[\tau,\infty)} \leq 1$$

Lemma (2.3.11) ist anwendbar, und es folgt:

$$v \text{ ist ein Polynom der Ordnung } \leq (2m, 1).$$

Dies ist ein Widerspruch zu $D^{2m,1}v(p) \neq D^{2m,1}v(0)$.

□

Lemma 2.3.13 (Lokale Hölderabschätzungen für das Cauchyproblem)**.** *Sei* $H = \partial_t + \sum_{|\alpha|=2m} a^\alpha D_\alpha$ *mit konstanten Koeffizienten und sei* $u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{U}_\rho^+(0))$ *mit* $u(\cdot, 0) = u_0$*, dann gilt für alle* $\Theta \in (0, 1)$*:*

$$[D^{2m,1}u]_{\alpha,U^+_{\Theta\rho}(0)} \leq c([Hu]_{\alpha,U^+_\rho(0)} + [\nabla^{2m}u_0]_{\alpha,B^+_\rho(0)} + \rho^{-2m-\alpha}||u||_{L^\infty(U^+_\rho(0))})$$

Beweis:
Der Beweis folgt mit Hilfe von Lemma (2.3.12) aus den Hölderabschätzungen für das Cauchyproblem ebenso wie Lemma (2.3.9) aus den Hölderabschätzungen für Ganzraumlösungen folgte.

□

Satz 2.3.14 (Schauderabschï£¡tzungen am Zeitrand)**.** *Sei* $L = \partial_t + \sum_{|\alpha|\leq 2m} a^\alpha D_\alpha$ *ein parabolischer Differentialoperator auf* $U_R^+(0)$ *mit*

$$\sum_{|\beta|\leq 2m} R^{2m-|\beta|}||a^\beta||_{L^\infty(U_R^+(0))} + \sum_{|\beta|\leq 2m} R^{2m-|\beta|+\alpha}[a^\beta]_{\alpha,U_R^+(0)} \leq M.$$

Dann gilt für $u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{U}^+_R(0))$ *mit* $u(\cdot,0) = u_0$*:*

$$[D^{2m,1}u]_{\alpha,U^+_{\Theta R}(0)} \leq c([Lu]_{\alpha,U^+_R(0)} + [\nabla^{2m}u_0]_{\alpha,B^+_R(0)} + R^{-2m-\alpha}||u||_{L^\infty(U^+_R(0))})$$

für alle $\Theta \in (0,1)$ *und* $c = c(n,N,\Theta,M,L)$.

Beweis:
Der Beweis verflüäuft analog zum Beweis der Inneren Schauderabschätzungen (Satz (2.3.10)): Man spaltet den Operator L in $L = P_y + R_y$ auf, wendet dann Lemma (2.3.13) auf P_y und u_0 an und schätzt R_y durch Interpolation ab.

□

Nun zum Ortsrandfall mit Dirichletranddaten.

Lemma 2.3.15. *Sei* $H = \partial_t + \sum_{|\alpha|=2m} a^\alpha D_\alpha$ *mit konstanten Koeffizienten und sei* $u \in C^{2m,1}(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ *mit* $Hu = 0$ *und* $|u(p)| \leq cd(p,0)^{2m+\alpha}$ *für* $d(p,0) \gg 1$ *sowie* $D_\alpha u = D_\alpha g$ *auf* $\partial(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)) \times \mathbb{R}$ *für* $|\alpha| < m$*, wobei* g *ein Polynom höchstens* $(2m,1)$*-ter Ordnung ist, dann gilt:*

$$u \text{ ist ein Polynom der Ordnung} \leq (2m,1)$$

Beweis:
Betrachte:

$$v := u - g + (a^{2me_n})^{-1}\frac{1}{(2m)!}x_n^{2m}Hg$$

Dann gilt für v unter der Berücksichtigung, daß der Koeffizient a^{2me_n} von D_n^{2m} in H wegen der starken Elliptizität positiv ist:

$v \in C^{2m,1}(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty) \times \mathbb{R})$,

$Hv = 0$,

$|v(p)| \leq cd(p,0)^{2m+\alpha}$ für $d(p,0) \gg 1$,

$D_\alpha v(\cdot,0,\cdot) = 0$ für $|\alpha| < m$

Also kann erneut analog zu Lemma (2.3.7) argumentiert werden, wobei nur die in der Zeit lokalisierten L^2-Abschätzungen (Satz (2.2.3)) auf Bällen $U_R^{++}(0) := B_R^+(0) \times (-R^{2m}, R^{2m})$ benutzt werden.

□

Lemma 2.3.16 (Hölderabschätzungen am Ortsrand)**.** *Sei* $H = \partial_t + \sum_{|\alpha|=2m} a^\alpha D_\alpha$ *ein parabolischer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und sei* $u \in C^{2m,1,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ *mit* $D_\alpha u = D_\alpha g$ *auf* $\partial(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)) \times \mathbb{R}$ *für* $|\alpha| < m$*. Dann gilt:*

$$[D^{2m,1}u]_{\alpha,\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)\times\mathbb{R}} \leq c([Hu]_{\alpha,\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)\times\mathbb{R}} + \sum_{k=0}^{m-1}[D^{2m-k,1}g]_{\alpha,\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}\times\mathbb{R}})$$

Beweis:
Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma (2.3.12), mit einer Fallunterscheidung bei der t_k durch $x_{n,k}$ ersetzt wird und dies entweder auf eine Ganzraumlösung zurückführt oder nach Grenzübergang das obige Lemma (2.3.15) anwendbar wird.

□

Lemma 2.3.17 (Lokale Hölderabschätzungen am Ortsrand). *Sei* $H = \partial_t + \sum_{|\alpha|=2m} a^\alpha D_\alpha$ *mit konstanten Koeffizienten und sei* $u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{U}_\rho^{++}(0))$ *mit* $D_\alpha u = D_\alpha g$ *auf* $\partial(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)) \times \mathbb{R}$ *für* $|\alpha| < m$*, dann gilt für alle* $\Theta \in (0,1)$*:*

$$\begin{aligned}[D^{2m,1}u]_{\alpha,U^{++}_{\Theta\rho}(0)} &\leq c([Hu]_{\alpha,U^{++}_\rho(0)} + \sum_{k=0}^{m-1}[D^{2m-k,1}g]_{\alpha,\partial B^+_\rho(0)\times(-\rho^{2m},\rho^{2m})} \\ &+ \rho^{-2m-\alpha}||u||_{L^\infty(U^{++}_\rho(0))})\end{aligned}$$

Beweis:
Der Beweis folgt mit Hilfe von Lemma (2.3.16) aus den Hölderabschätzungen am Ortsrand ebenso wie Lemma (2.3.9) aus den Hölderabschätzungen für Ganzraumlösungen folgte.

□

Satz 2.3.18 (Schauderabschï£¡tzungen am Ortsrand). *Sei* $L = \partial_t + \sum_{|\alpha|\leq 2m} a^\alpha D_\alpha$ *ein parabolischer Differentialoperator auf* $U_R^{++}(0)$ *mit*

$$\sum_{|\beta|\leq 2m} R^{2m-|\beta|}||a^\beta||_{L^\infty(U^{++}_R(0))} + \sum_{|\beta|\leq 2m} R^{2m-|\beta|+\alpha}[a^\beta]_{\alpha,U^{++}_R(0)} \leq M.$$

Dann gilt für $u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{U}_R^{++}(0))$ *mit* $D_\alpha u = D_\alpha g$ *auf* $\partial(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)) \times \mathbb{R}$ *für* $|\alpha| < m$*:*

$$\begin{aligned}[D^{2m,1}u]_{\alpha,U^{++}_{\Theta R}(0)} &\leq c([Lu]_{\alpha,U^{++}_R(0)} + \sum_{k=0}^{m-1}[D^{2m-k,1}g]_{\alpha,\partial B^+_R(0)\times(-R^{2m},R^{2m})} \\ &+ R^{-2m-\alpha}||u||_{L^\infty(U^{++}_R(0))})\end{aligned}$$

für alle $\Theta \in (0,1)$ *und* $c = c(n, N, \Theta, M, L)$.

Beweis:
Siehe Beweis von Satz (2.3.10) mit Hilfe von Lemma (2.3.17).

□

Abschließend soll der Fall mit Zeit- und Ortsrand betrachtet werden.

Lemma 2.3.19. *Sei* $H = \partial_t + \sum_{|\alpha|=2m} a^\alpha D_\alpha$ *ein parabolischer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten,* $u \in C^{2m,1}(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty) \times [0,\infty), \mathbb{R}^N)$ *mit* $Hu = 0$ *und* $|u(p)| \leq cd(p,0)^{2m+\alpha}$ *für* $d(p,0) \gg 1$ *sowie* $D_\alpha u = D_\alpha g$ *auf* $\partial(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)) \times [0,\infty)$ *für* $|\alpha| < m$ *und* $u(\cdot,0) = u_0$*, wobei* g *und* u_0 *Polynome höchstens* $(2m,1)$*-ter Ordnung sind. Außerdem gelte die Kompatibilitätsbedingung:*

$$D_\alpha g(\cdot,0) = D_\alpha u_0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \quad \text{für} \quad |\alpha| \leq m-1$$

Dann gilt:

u ist ein Polynom der Ordnung $\leq (2m, 1)$

Beweis:
Indem man $U := u - g + (a^{2me_n})^{-1}\frac{1}{(2m)!}x_n^{2m}Hg$ setzt, erhält man:

$U \in C^{2m,1}(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty) \times [0,\infty), \mathbb{R}^N)$,

$HU = 0$,

$D_\alpha U = 0$ auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \times [0,\infty)$ für $|\alpha| \leq m-1$,

$U(\cdot, 0) = u_0 - g(\cdot, 0) + (a^{2me_n})^{-1}\frac{1}{(2m)!}x_n^{2m}Hg$,

$|U(p)| \leq cd(p,0)^{2m+\alpha}$ für $d(p,0) \gg 1$,

$U(\cdot, 0)$ ist ein Polynom der Ordnung $\leq 2m$.

Zusätzlich erfüllt U die Kompatibilitätsbedingung

$$D_\alpha U(\cdot, 0) = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \quad \text{für} \quad |\alpha| \leq m-1.$$

Indem man $v(x,t) := U(x,t) - U(x,0) + t\tilde{H}(U(x,0))$ definiert, wobei $\tilde{H} = H - \partial_t$, erhält man unter Verwendung der Kompatibilitätsbedingung von U:

$v \in C^{2m,1}(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty) \times [0,\infty), \mathbb{R}^N)$,

$Hv = 0$,

$D_\alpha v = 0$ auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \times [0,\infty)$ für $|\alpha| \leq m-1$,

$v(\cdot, 0) = 0$,

$|v(p)| \leq cd(p,0)^{2m+\alpha}$ für $d(p,0) \gg 1$

Nun können die globalen parabolischen L^2-Abschätzungen (siehe Satz (2.2.2)) auf dem Ball $U_R^{+++} := B_R^+ \times (0, R^{2m})$ angewendet werden und man erhält analog zu Lemma (2.3.7) die Aussage.

□

Lemma 2.3.20 (Hölderabschätzungen am Orts- und Zeitrand). *Sei $H = \partial_t + \sum_{|\alpha|=2m} a^\alpha D_\alpha$ ein parabolischer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und sei $u \in C^{2m,1,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty) \times [0,\infty), \mathbb{R}^N)$ mit $D_\alpha u = D_\alpha g$ auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \times [0,\infty)$ für $|\alpha| < m$ und $u(\cdot,0) = u_0$ mit der Kompatibilitätsbedingung $D_\alpha g(\cdot,0) = D_\alpha u_0$ auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ für $|\alpha| < m$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}[D^{2m,1}u]_{\alpha,\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)\times[0,\infty)} \quad &\leq \quad c([Hu]_{\alpha,\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)\times[0,\infty)} \\ &+ \quad \sum_{k=0}^{m-1}[D^{2m-k,1}g]_{\alpha,\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}\times[0,\infty)} \\ &+ \quad [\nabla^{2m}u_0]_{\alpha,\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)})\end{aligned}$$

Beweis:
Hier sind vier Fälle zu unterscheiden, da die x_n und die t Variable skaliert werden. Konvergiert eine der beiden skalierten Variablen gegen $-\infty$ befindet man sich in einem bereits bekannten Fall. Deshalb ist im Wesentlichen der 4. Fall zu betrachten, der analog zu den anderen Abschätzungen diesmal mit Hilfe von Lemma (2.3.19) folgt.

□

Lemma 2.3.21 (Lokale Hölderabschätzungen am Orts- und Zeitrand). *Sei $H = \partial_t + \sum_{|\alpha|=2m} a^\alpha D_\alpha$ ein parabolischer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und sei $u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{U}_\rho^{+++}(0))$ mit $D_\alpha u = D_\alpha g$ auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \times [0,\infty)$ für $|\alpha| < m$ und $u(\cdot,0) = u_0$ mit der Kompatibilitätsbedingung $D_\alpha g(\cdot,0) = D_\alpha u_0$ auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ für $|\alpha| < m$. Dann gilt für alle $\Theta \in (0,1)$:*

$$\begin{aligned}[D^{2m,1}u]_{\alpha,U^{+++}_{\Theta\rho}(0)} &\leq c([Hu]_{\alpha,U^{+++}_\rho(0)} + \sum_{k=0}^{m-1}[D^{2m-k,1}g]_{\alpha,\partial B^+_\rho(0)\times(0,\rho^{2m})} \\ &+ [\nabla^{2m}u_0]_{\alpha,B^+_R(0)} + \rho^{-2m-\alpha}||u||_{L^\infty(U^{+++}_\rho(0))})\end{aligned}$$

Beweis:
Der Beweis folgt mit Hilfe von Lemma (2.3.20) aus den Hölderabschätzungen am Orts- und Zeitrand ebenso wie Lemma (2.3.9) aus den Hölderabschätzungen für Ganzraumlösungen folgte.

□

Satz 2.3.22 (Schauderabschï£¡tzungen am Orts- und Zeitrand). *Sei $L = \partial_t + \sum_{|\alpha|\leq 2m} a^\alpha D_\alpha$ ein parabolischer Differentialoperator auf $U_R^{+++}(0)$ mit*

$$\sum_{|\beta|\leq 2m} R^{2m-|\beta|}||a^\beta||_{L^\infty(U^{+++}_R(0))} + \sum_{|\beta|\leq 2m} R^{2m-|\beta|+\alpha}[a^\beta]_{\alpha,U^{+++}_R(0))} \leq M$$

Dann gilt für $u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{U}_R^{+++}(0))$ mit $D_\alpha u = D_\alpha g$ auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \times [0,\infty)$ für $|\alpha| < m$ und $u(\cdot,0) = u_0$ mit der Kompatibilitätsbedingung $D_\alpha g(\cdot,0) = D_\alpha u_0$ auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ für $|\alpha| < m$:

$$\begin{aligned}[D^{2m,1}u]_{\alpha,U^{+++}_{\Theta R}(0)} &\leq c([Lu]_{\alpha,U^{+++}_R(0)} + \sum_{k=0}^{m-1}[D^{2m-k,1}g]_{\alpha,\partial B^+_R(0)\times(0,R^{2m})} \\ &+ [\nabla^{2m}u_0]_{\alpha,B^+_R(0)} + R^{-2m-\alpha}||u||_{L^\infty(U^{+++}_R(0))})\end{aligned}$$

für alle $\Theta \in (0,1)$ und $c = c(n,N,\Theta,M,L)$.

Beweis:
Siehe Beweis zu Satz (2.3.10) mit Hilfe von Lemma (23.21).

□

Diese Abschätzungen werden nun zu globalen Schauderabschätzungen kombiniert:

Satz 2.3.23 (Globale Schauderabschätzungen). *Sei $G \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^∞-Gebiet und sei $L = \partial_t + \sum_{|\alpha|\leq 2m} a^\alpha D_\alpha$ ein parabolischer Differentialoperator mit*

$$||a^\beta||_{C^{0,0,\alpha}(G\times(0,T))} \leq M.$$

Weiter sei $u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{G} \times (0,T))$ eine Lösung von

$Lu = f$ *in* $G \times (0,T)$

$u = u_0$ *auf* $G \times \{0\}$

$D_\alpha u = D_\alpha g$ *für* $|\alpha| \leq m-1$ *auf* $\partial G \times (0,T)$

mit der Kompatibilitätsbedingung $D_\alpha g(\cdot,0) = D_\alpha u_0$ *auf* ∂G *für* $|\alpha| < m$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} ||u||_{C^{2m,1,\alpha}(G\times(0,T)} &\leq c(||f||_{C^{0,0,\alpha}(G\times(0,T))} + ||u_0||_{C^{2m,\alpha}(G)} \\ &+ ||g||_{C^{2m,1,\alpha}(\partial G\times(0,T))} + ||u||_{L^\infty(G\times(0,T))}) \end{aligned}$$

mit $c = c(n,N,\alpha,L,M,T)$.

Beweis:
Für jeden Punkt in $G \times (0,T)$ läßt sich eine Umgebung finden, welche durch einen C^∞-Diffeomorphismus entweder auf U_R, U_R^+, U_R^{++} oder U_R^{+++} abgebildet werden kann. Auf jeder dieser Umgebungen kann einer der Sätze (2.3.10), (2.3.14), (2.3.18) und (2.3.22) angewendet werden und man erhält durch ein Überdeckungsargument und anschließendes Aufsummieren der einzelnen Abschätzungen die Behauptung, wenn analog zu Lemma (2.1.11) und Satz (2.1.12) berücksichtigt wird, daß unter dem Diffeomorphismus die Parabolizität von L und die Beschränktheit von a^β in der $C^{0,\alpha}$-Norm erhalten bleiben und außerdem die Normen äquivalent sind.

□

Nun sollen die Resultate auf einen parabolischen Differentialoperator auf einer glatten, kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g) ï£¡bertragen werden.
Sei

$$Lu = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a^\alpha D_\alpha u$$

ein stark elliptischer Operator, wobei $D_\alpha u = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n} u$ in lokalen Koordinaten ist und die Koeffizienten die Bedingung

$$||a^\beta||_{C^{0,0,\alpha}(M\times(0,T))} \leq C$$

erfüllen sollen, dann erhält man den folgenden Satz:

Satz 2.3.24. *Sei* L *ein stark elliptischer Differentialoperator auf* (M,g) *und die Koeffizienten erfüllen:*

$$||a^\beta||_{C^{0,0,\alpha}(M\times(0,T))} \leq C.$$

Desweiteren sei $u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$ *eine Lösung von*

$Lu = f$ *in* $M \times (0,T)$

$u = u_0$ *auf* $M \times \{0\}$

$D_\alpha u = D_\alpha g$ *für* $|\alpha| \leq m-1$ *auf* $\partial M \times (0,T)$

mit den Kompatibilitätsbedingungen $D_\alpha u_0 = D_\alpha g(\cdot,0)$ *auf* ∂M *für* $|\alpha| < m$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} ||u||_{C^{2m,1,\alpha}(M\times(0,T))} &\leq c(||f||_{C^{0,0,\alpha}(M\times(0,T))} + ||u_0||_{C^{2m,\alpha}(M)} \\ &+ ||g||_{C^{2m,1,\alpha}(\partial M\times(0,T))} + ||u||_{L^\infty(M\times(0,T))}) \end{aligned}$$

mit $c = c(n,N,\alpha,L,M,T)$.

Beweis:
Sei $\{V_\gamma\} \subset M$ eine endliche Überdeckung von M und seien $\psi_\gamma : \Omega_\gamma \to \tilde{V}_\gamma \supset\supset V_\gamma$ lokale Koordinaten, in denen für die Metrik Folgendes gilt:

$$\frac{1}{2} \leq (g) \leq 2$$

Aus Satz (2.3.23) erhält man in lokalen Koordinaten:

$$\begin{aligned} ||u||_{C^{2m,1,\alpha}(V_l \times (0,T))} &\leq c(||f||_{C^{0,0,\alpha}(\tilde{V}_l \times (0,T))} + ||u_0||_{C^{2m,\alpha}(\tilde{V}_l)} \\ &+ ||g||_{C^{2m,1,\alpha}(\partial \tilde{V}_l \times (0,T))} + ||u||_{L^\infty(\tilde{V}_l \times (0,T))}) \\ &\leq c(||f||_{C^{0,0,\alpha}(M \times (0,T))} + ||u_0||_{C^{2m,\alpha}(M)} \\ &+ ||g||_{C^{2m,1,\alpha}(\partial M \times (0,T))} + ||u||_{L^\infty(M \times (0,T))}) \end{aligned}$$

Da $\{V_\gamma\}$ eine Überdeckung von M ist, gilt:

$$\begin{aligned} ||u||_{C^{2m,1}(M \times (0,T))} &\leq c(||f||_{C^{0,0,\alpha}(M \times (0,T))} + ||u_0||_{C^{2m,\alpha}(M)} \\ &+ ||g||_{C^{2m,1,\alpha}(\partial M \times (0,T))} + ||u||_{L^\infty(M \times (0,T))}) \end{aligned}$$

M ist kompakt, daher folgt:

$$\begin{aligned} ||u||_{C^{2m,1,\alpha}(M \times (0,T))} &\leq \sup_l ||u||_{C^{2m,1,\alpha}(V_l \times (0,T))} + c||u||_{C^{2m,1}(M \times (0,T))} \\ &\leq c(||f||_{C^{0,0,\alpha}(M \times (0,T))} + ||u_0||_{C^{2m,\alpha}(M)} \\ &+ ||g||_{C^{2m,1,\alpha}(\partial M \times (0,T))} + ||u||_{L^\infty(M \times (0,T))}) \end{aligned}$$

□

Nun sollen für Gleichungen mit Nullrandwerten sowohl in Ort als auch in der Zeit die L^∞-Norm von u in der Schauderabschätzung beseitigt werden.

Lemma 2.3.25. *Sei L ein stark elliptischer Differentialoperator auf (M, g) und die Koeffizienten erfüllen*

$$||a^\beta||_{C^{0,0,\alpha}(M \times (0,T))} \leq C.$$

Desweiteren sei $u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$ eine Lösung von

$Lu = f$ *in* $M \times (0,T)$

$u = 0$ *auf* $M \times \{0\}$

$D_\alpha u = 0$ *für* $|\alpha| \leq m-1$ *auf* $\partial M \times (0,T)$

Dann gilt:

$$||u||_{C^{2m,1,\alpha}(M \times (0,T))} \leq c||f||_{C^{0,0,\alpha}(M \times (0,T))}$$

mit $c = c(n, N, \alpha, L, M, T)$.

Beweis:
Aus Satz (2.3.24) folgt:

$$||u||_{C^{2m,1,\alpha}(M \times (0,T))} \leq c(||f||_{C^{0,0,\alpha}(M \times (0,T))} + ||u||_{L^\infty(M \times (0,T))})$$

Mit den parabolischen L^2-Abschätzungen (Satz (2.2.1) nach Einführung von lokalen Koordinaten) gilt:

$$||u||_{L^2(M\times(0,T))} \leq c||f||_{L^2(M\times(0,T))} \leq c||f||_{C^{0,0,\alpha}(M\times(0,T))}$$

Weiter folgt aus dem Ehrling-Lemma (siehe [Alt99]):

$$||u||_{L^\infty(M\times(0,T))} \leq \epsilon||u||_{C^{2m,1,\alpha}(M\times(0,T))} + c_\epsilon||u||_{L^2(M\times(0,T))}$$

Durch Verschlucken erhält man die Behauptung.

□

2.4 Existenztheorie

In diesem Abschnitt soll zunächst die Existenz einer Lösung für das lineare parabolische Problem bewiesen werden. Dies geschieht folgendermaßen: Es wird die Existenz einer Lösung für den einfachsten Operator $(-\Delta)^m$ gezeigt. Durch die Kontinuitätsmethode erhält man die Existenz einer Lösung zum allgemeinen Problem.

Lemma 2.4.1. *Sei (M, g) eine glatte, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann existiert für alle $f \in C^\infty(\overline{M} \times (0,T), \mathbb{R}^N)$, welche die Kompatibilitätsbedingung $f = 0$ auf $\partial M \times \{0\}$ erfüllen, eine eindeutige Lösung $u \in C^\infty(\overline{M} \times (0,T), \mathbb{R}^N)$ von:*

$$\partial_t u + (-\Delta)^m u = f \quad in \quad M \times (0,T)$$

$$u(\cdot, 0) = 0 \quad auf \quad M$$

$$D_\alpha u = 0 \quad auf \quad \partial M \times (0,T) \quad für \quad |\alpha| \leq m-1,$$

wobei Δ an dieser Stelle den Laplace-Beltrami Operator auf M bezeichnet.

Beweis:
Sei $u \in L^2(0,T; W_0^{m,2}(M))$ eine schwache Lösung des obigen Systems. Dann folgt die C^∞-Regularität von u aus den parabolischen L^2-Abschätzungen mit Anfangs- und Randwerten (siehe Satz (2.2.2) nach Einführung von lokalen Koordinaten), sobald $f(\cdot,0) \in C_c^\infty(\overline{M})$. Um dies zu erreichen, betrachte:

$$\varphi_\delta(s) := \begin{cases} s \quad \text{falls} \quad |s| \geq 2|\delta| \\ 2(s-\delta) \quad \text{falls} \quad |\delta| \leq |s| \leq 2|\delta| \\ 0 \quad \text{falls} \quad |s| \leq |\delta|, \end{cases}$$

wobei $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_N)$.
Dann gilt:

$$||\varphi_\delta(f) - f|| \leq c|\delta| \to 0$$

$$[\varphi_\delta \circ f]_\alpha \leq c[f]_\alpha$$

Sei nun $u_\delta \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$ die Lösung des Systems mit rechter Seite $\varphi_\delta \circ f$, dann folgt aus Lemma (2.3.25):

$$||u_\delta||_{C^{2m,1,\alpha}(M\times(0,T))} \leq c||f||_{C^{0,0,\alpha}(M\times(0,T))}$$

Nach Wahl einer Teilfolge erhält man:

$$u_\delta \overset{C^{2m}}{\to} u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$$

u ist die gesuchte Lösung.

Nun gilt es die Eindeutigkeit der Lösung u zu zeigen. Betrachte hierzu $v := u - \tilde{u}$, wobei $\tilde{u}$ eine weitere Lösung des Systems sein soll. Indem man die Gleichung mit v testet, erhält man:

$$\frac{1}{2}\int_M |v(t_0)|^2 + \int_0^{t_0}\int_M (-\Delta)^m v \cdot v = 0$$

Der zweite Term ist positiv und daraus folgt:

$$v = 0$$

□

Erstmalige Definition von Räumen, die im nï£¡chsten Lemma Anwendung finden.

$C_{00}^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T)) := \{u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T)) : u(\cdot,0) = 0$ und $D_\alpha u(\cdot,t) = 0$ für $|\alpha| \leq m-1$ auf $\partial M\}$

$C_0^{0,0,\alpha}(\overline{M} \times (0,T)) := \{u \in C^{0,0,\alpha}(\overline{M} \times (0,T)) : u = 0$ auf $\partial M \times \{0\}\}$

Nach Kombination des obigen Resultats mit den Abschï£¡tzungen aus dem letzten Abschnitt erhält man folgendes Lemma:

Lemma 2.4.2. *Sei (M,g) eine kompakte, glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Betrachte*

$$L : C_{00}^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T)) \to C_0^{0,0,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$$

$$Lu := \partial_t u + (-\Delta)^m u$$

Dann ist L stetig, bijektiv und besitzt ein stetiges Inverses.

Beweis:
Zu $f \in C_0^{0,0,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$ wï£¡hle $f_j \in C_c^\infty(\overline{M} \times (0,T))$, so daß gilt:

$||f_j||_{C^{0,0,\alpha}(M\times(0,T))} \leq 2||f||_{C^{0,0,\alpha}(M\times(0,T))}$ und

$f_j \to f$ in $C^{0,0,\beta}(M \times (0,T))$ fï£¡r $0 < \beta < \alpha$

Mit Lemma (2.4.1) erhält man die Existenz von Abbildungen $u_j \in C^\infty \cap C_{00}^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$, so daß gilt:

$$Lu_j = f_j$$

Da L die Voraussetzungen von Lemma (2.3.25) erfüllt, gilt:

$$||u_j||_{C^{2m,1,\alpha}(M\times(0,T))} \leq c||f_j||_{C^{0,0,\alpha}(M\times(0,T))} \leq c||f||_{C^{0,0,\alpha}(M\times(0,T))}$$

Nach Wahl einer Teilfolge erhält man:

$$u_j \to u \;\text{ in }\; C^{2m,1,\beta}(\overline{M} \times (0,T))$$

Also:

$$Lu = f$$

(1) $||u||_{C^{2m,1,\alpha}(M\times(0,T))} \leq c||f||_{C^{0,0,\alpha}(M\times(0,T))}$

Daraus folgt die Bijektivität und die Existenz eines stetigen Inversen von L. Eine Abschätzung an die Norm von L^{-1} ist durch (1) gegeben.

□

Es folgt der Existenzsatz für das allgemeine lineare Problem.

Satz 2.4.3 (Existenzsatz)**.** *Sei L ein stark elliptischer Differentialoperator mit in der $C^{0,0,\alpha}$-Norm beschränkten Koeffizienten auf einer kompakten, glatten Riemannschen Mannigfaltigkeit. Dann existiert zu jedem $f \in C_0^{0,0,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$ eine eindeutige Lösung $u \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$ von*

$$\partial_t u + Lu = f \text{ auf } M \times (0,T)$$

$$u(\cdot, 0) = 0 \text{ auf } M$$

$$D_\alpha u = 0 \text{ auf } \partial M \times (0,T) \text{ für } |\alpha| \leq m-1$$

Weiterhin erhält man die Abschätzung:

$$||u||_{C^{2m,1,\alpha}(M\times(0,T))} \leq c||f||_{C^{0,0,\alpha}(M\times(0,T))},$$

wobei $c = c(M, m, \alpha, T, L)$.

Anders formuliert bedeutet dies Folgendes:
Der lineare Differentialoperator

$$P : C_{00}^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T)) \to C_0^{0,0,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$$

$$Pu = \partial_t u + Lu$$

ist bijektiv, besitzt ein stetiges Inverses, und es gilt:

$$||L^{-1}|| \leq c$$

Beweis:
Definiere:

$$P_\tau : C_{00}^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T)) \to C_0^{0,0,\alpha}(\overline{M} \times (0,T)) \quad \tau \in [0,1]$$

$$P_0 u := \partial_t u + (-\Delta)^m u$$

$$P_\tau u := (1-\tau)P_0 u + \tau P u$$

(P_τ) ist ein parabolischer Operator mit in der $C^{0,0,\alpha}$-Norm beschränkten Koeffizienten. Aus Lemma (2.3.25) folgt für $u \in C_{00}^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$:

(1) $||u||_{C^{2m,1,\alpha}(M\times(0,T))} \leq c||P_\tau u||_{C^{0,0,\alpha}(M\times(0,T))}$,

wobei c nicht von τ abhängt. Damit erhält man die Injektivität von P_τ und falls P^{-1} existiert, gilt:

$$||P_\tau^{-1}|| \leq c$$

Also genügt es die Surjektivität von P_τ zu zeigen.
Definiere dazu:

$$A := \{\tau \in [0,1] : P_\tau \text{ ist surjektiv}\}$$

Aus Lemma (2.4.2) folgt:

$$0 \in A$$

und damit

$$A \neq \emptyset$$

Aus (1) folgt:

$$A \text{ ist abgeschlossen,}$$

denn, falls $\tau_j \to \tau_0$, $\tau_j \in A$ und $f \in C_0^{0,0,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$, existieren $u_j \in C_{00}^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$ mit

$$P_{\tau_j} u_j = f$$

$$||u_j||_{C^{2m,1,\alpha}(M \times (0,T))} \leq c||P_{\tau_j} u_j||_{C^{0,0,\alpha}(M \times (0,T))} \leq c||f||_{C^{0,0,\alpha}(M \times (0,T))}$$

Nach Wahl einer Teilfolge erhält man:

$$u_j \to u \text{ in } C^{2m,1,\beta}(\overline{M} \times (0,T)),\ 0 < \beta < \alpha$$

$$u \in C_{00}^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$$

$$P_{\tau_0} u = f$$

Also ist P_{τ_0} surjektiv und somit $\tau_0 \in A$.
Nun gilt es noch die Offenheit von A zu zeigen.
Sei $\tau_0 \in A$, dann ist

$$P_{\tau_0} : C_{00}^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times (0,T)) \to C_0^{0,0,\alpha}(\overline{M} \times (0,T))$$

ein stetiger, invertierbarer Operator.
Da die Menge der linearen, invertierbaren Operatoren offen ist, erhält man die Offenheit von A, denn für τ nahe bei τ_0 gilt:

$$||P_\tau - P_\sigma|| \leq c|\tau - \sigma|||L - P_0||$$

Also ist A ebenfalls offen, und es gilt:

$$A = [0,1]$$

Insgesamt folgt:

$$L \text{ ist invertierbar}$$

□

Bemerkung 2.4.4. *Man kann diesen Existenzsatz auch auf Probleme mit allgemeineren Randwerten*

$$u(\cdot, 0) = u_0,$$

$$D_\alpha u = D_\alpha g \text{ auf } \partial M \times [0,T] \text{ für } |\alpha| \leq m-1$$

ausweiten. Dabei müssen allerdings folgende Kompatibilitätsbedingungen erfüllt sein:

$$D_\alpha u_0 = D_\alpha g(\cdot, 0) \text{ auf } \partial M \times \{0\} \text{ für } |\alpha| \leq m-1,$$

$$f(\cdot, 0) = Lu_0 + \partial_t g(\cdot, 0) \text{ auf } \partial M$$

*Dieser Fall wird ähnlich wie in Lemma (*2.3.19*) mit Hilfe der Kompatibilitätsbedingungen auf den oben behandelten Fall zurückgeführt.*

Im Folgenden werden quasilineare parabolische Systeme betrachtet und deren Kurzzeitexistenz gezeigt. Dafür sind einige Definitionen notwendig und es müssen Bedingungen an die zu betrachtenden Systeme gestellt werden.
Die Systeme, die betrachtet werden sollen, sind von folgender Form:

$$\partial_t u = F(x,t,u,\nabla u,\ldots,\nabla^{2m}u) \text{ auf } M \times (0,T)$$

$$u = 0 \text{ auf } M \times \{0\} \cup \partial M \times [0,T]$$

Es folgen in lokalen Koordinaten die an F zu stellenden Bedingungen, dabei sei $V_\varphi \subset M$ und $\varphi : V_\varphi \to U_\varphi \subset \mathbb{R}^n$:

(1) Differenzierbarkeitsannahmen:

- $F : U_\varphi \times [0,T] \times W \to \mathbb{R}^N$, wobei

  $W = \{Q = (z, p_1, \ldots, p_{2m}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n^{2m}N} : |Q| < \epsilon\}$.

- $F, D_Q F, \ldots, D_Q^{2m+1} F$ sind definiert und stetig auf $\overline{U}_\varphi \times [0,T] \times W$.

- $||F||_{L^\infty} + ||D_Q F||_{L^\infty} + \ldots + ||D_Q^{2m+1} F||_{L^\infty} \leq \Lambda$

- $[F(\cdot,\cdot,Q)]_\alpha + \ldots + [D_Q^{2m} F(\cdot,\cdot,Q)]_\alpha \leq \Lambda \ \forall Q \in W$

(2) Elliptizitätsbedingung:

$(D_{p_{2m}} F)(x, 0, \ldots, 0)$ sei stark elliptisch.

(3) Kompatibilitätsbedingung:

$F(x, 0, \ldots, 0) = 0$ für $x \in \partial M$

Jetzt kann der Satz über die Kurzzeitexistenz formuliert werden.

Satz 2.4.5 (Kurzzeitexistenz)**.** *Unter den Voraussetzungen* (1), (2) *und* (3) *besitzt das obige Anfangsrandwertproblem für hinreichend kleines $T > 0$ eine Lösung*

$$u \in C^{2m,1,\beta}(\overline{M} \times [0,T])$$

für $\beta < \alpha$.

Beweis:
1.Schritt:
o.E. $f(x) := F(x, 0, \ldots, 0) = 0$ für $x \in M$, sonst löse

$$\partial_t v + (-\Delta)^m v = f \text{ in } M \times (0,T)$$

$$v = 0 \text{ auf } M \times \{0\} \cap \partial M \times [0,T]$$

Nach Voraussetzung (1) ist $f \in C^{0,0,\alpha}(\overline{M} \times [0,T])$ und die Kompatibilitätsbedingungen sind aufgrund von Voraussetzung (3) erfüllt. Also existiert nach Satz (2.4.3) eine Lösung

$v \in C^{2m,1,\alpha}(\overline{M} \times [0,T])$.
Nun betrachte $w := u - v$.

$$\begin{aligned} \partial_t w &= \partial_t u - \partial_t v \\ &= F(x,t,v+w,\dots,\nabla^{2m}(v+w)) + (-\Delta)^m v - f \\ &=: G(x,t,w,\dots,\nabla^{2m} w), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} G(x,t,p_0,\dots,p_{2m}) &= F(x,t,v(x,t)+p_0,\dots,\nabla^{2m}v(x,t)+p_{2m}) \\ &- F(x,0,\dots,0) + ((-\Delta)^m v)(x,t) \end{aligned}$$

Also gilt nach Konstruktion und aufgrund der Kompatibilitätsbedingungen $G(x,0,\dots,0) = 0$ auf M.
Weiterhin gilt:
Nach Verkleinerung von T erhält man

$$|(v(x,t),\dots,\nabla^{2m}v(x,t))| < \frac{\epsilon}{2}$$

für $(x,t) \in M \times [0,T]$ und damit ist G auf $\overline{M} \times [0,T] \times W(\frac{\epsilon}{2})$ definiert und G, $D_Q G$, …, $D_Q^{2m} G$ sind stetig und beschränkt. Auch die α-Hölderhalbnormen sind mit einem etwas veränderten Λ beschränkt.
Außerdem gilt:

$$(D_{p_{2m}} G)(x,0,\dots,0) = (D_{p_{2m}} F)(x,0,\dots,0)$$

Damit erfüllt G die Voraussetzungen (1) – (3) und es kann o.E. $f = 0$ angenommen werden.

2.Schritt:

$$X = \{u \in C^{2m,1,\beta}(\overline{M} \times (0,T), \mathbb{R}^N) : u = 0 \text{ auf } \partial M \times [0,T] \cup M \times \{0\}\}$$

$$Y = \{f \in C^{0,0,\beta}(\overline{M} \times (0,T), \mathbb{R}^N) : f = 0 \text{ auf } \partial M \times \{0\}\}$$

$$Z = \{u \in X : U = (u,\dots,\nabla^{2m}u) \in W(\epsilon)\ \forall (x,t) \in M \times (0,T)\}$$

Betrachte nun den nichtlinearen Operator

$$P : Z \to Y$$

$$P(u) = \partial_t u - F(x,t,u,\dots,\nabla^{2m}u)$$

Es soll gezeigt werden, daß P stetig Fréchet-differenzierbar auf Z ist mit der Ableitung

$$\begin{aligned} DP(u)v &= \partial_t v - (D_Q F)(x,t,U)V \\ &= \partial_t v - (F(x,t,U)v + \ldots + (D_{p_{2m}} F)(x,t,U)\nabla^{2m} v) \end{aligned}$$

Hierfür muß zunächst Folgendes gezeigt werden:

$DP(u) \in L(X,Y)$ mit

$$||DP(u)v||_{C^{0,0,\beta}} \leq c||v||_{C^{2m,1,\beta}} \ \forall\ v \in X$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$||D_Q F(x,t,U)||_{L^\infty} \leq \Lambda$$

Weiter gilt:

$$[D_Q F(x,t,U)]_\beta \leq \Lambda + ||D_Q^2 F||_{L^\infty}[U]_\beta \leq c(\Lambda)||u||_{C^{2m,1,\beta}}$$

$$||D_Q F(x,t,U)V||_{L^\infty} \leq \Lambda ||v||_{C^{2m,1,\beta}}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} [D_Q F(x,t,U)V]_\beta &\leq \Lambda [V]_\beta + c(\Lambda)||u||_{C^{2m,1,\beta}}||V||_{L^\infty} \\ &\leq c(\Lambda)(1 + ||u||_{C^{2m,1,\beta}})||v||_{C^{2m,1,\beta}} \end{aligned}$$

Nun soll gezeigt werden, daß $DP(u)$ tatsächlich die Fréchetableitung ist.

$$\begin{aligned} F(x,t,U+V) &- (F(x,t,U) + (D_Q F)(x,t,U)V) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)(D_Q^2 F)(x,t,U+sV)(V,V)ds \end{aligned}$$

Es gilt:

$$||\frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)(D_Q^2 F)(x,t,U+sV)(V,V)ds||_{L^\infty} \leq \Lambda ||v||^2_{C^{2m,1,\beta}}$$

und

$$\begin{aligned} [\frac{1}{2}\int_0^1 & (1-s)(D_Q^2 F)(x,t,U+sV)(V,V)ds]_\beta \\ &\leq 2\Lambda ||V||_{L^\infty}[V]_\beta + \int_0^1 [(D_Q^2 F)(x,t,U+sV)]_\beta ds ||V||^2_{L^\infty} \\ &\leq c\Lambda ||v||^2_{C^{2m,1,\beta}} + (\Lambda + \Lambda([U]_\beta + [V]_\beta))||V||^2_{L^\infty} \\ &\leq c\Lambda(1 + ||u||_{C^{2m,1,\beta}} + ||v||_{C^{2m,1,\beta}})||v||^2_{C^{2m,1,\beta}} \end{aligned}$$

Weiter muß gezeigt werden, daß $DP(u)$ stetig von u abhängt.

$$\begin{aligned} ||DP(u_1) - DP(u_2)||_{L(X,Y)} &\leq c||(D_Q F)(x,t,U_1) - (D_Q F)(x,t,U_2)||_{C^{0,0,\beta}} \\ &\leq c\Lambda ||U_1 - U_2||_{C^{0,0,\beta}} \\ &\leq c\Lambda ||u_1 - u_2||_{C^{0,0,\beta}} \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird gezeigt, daß

$$DP(0) : X \to Y$$

ein Isomorphismus ist.

$$\begin{aligned} DP(0)v &= \partial_t v - (D_Q F)(x,t,0)V \\ &= \partial_t v - ((D_{p_{2m}} F)(x,t,0)\nabla^{2m} v + \ldots + F(x,t,0)v) \end{aligned}$$

Nach eventueller Verkleinerung von T ist $(D_{p_{2m}}F)(x,t,0)$ stark elliptisch nach Voraussetzung (2) und die Koeffizienten des Operators sind hölderstetig mit beschränkten Normen. Zusätzlich sind die Kompatibilitätsbedingungen nach Wahl von X und Y erfüllt. Es kann also Satz (2.4.3) angewendet werden und man erhält die Behauptung.

Unter Anwendung des impliziten Funktionensatzes wird der Beweis vervollständigt:
$P(Z)$ enthält eine offene Umgebung der Funktion

$$P(0) = -F(x,t,0,\dots,0) =: -f(x,t) \in Y$$

Definiere nun die Abbildung:

$$f_\delta(x,t) := \begin{cases} 0, & \text{für } t \leq \delta; \\ f(x,t-\delta) & \text{für } t > \delta \end{cases}$$

Dann gilt:

$$||f - f_\delta||_{L^\infty} \leq [f - f_\delta]_\alpha \delta^{\frac{\alpha}{2m}} \to 0 \;\; mit \;\; \delta \to 0$$

Weiter gilt $(f(t) := f(x,t))$:

$$\begin{aligned} |t-t'| \leq \delta \;\; \Rightarrow \;\; & |f(t) - f_\delta(t) - f(t') + f_\delta(t')| \\ \leq \;\; & |f(t) - f(t')| + |f_\delta(t) - f_\delta(t')| \\ \leq \;\; & 2[f]_\alpha |t-t'|^{\frac{\alpha}{2m}} \\ \leq \;\; & c[f]_\alpha |t-t'|^{\frac{\beta}{2m}} \delta^{\frac{\alpha-\beta}{2m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |t-t'| > \delta \;\; \Rightarrow \;\; & |f(t) - f_\delta(t) - f(t') + f_\delta(t')| \\ \leq \;\; & |f(t) - f(t-\delta)| + |f(t') - f(t'-\delta)| \\ \leq \;\; & c[f]_\alpha \delta^{\frac{\alpha}{2m}} \\ \leq \;\; & c[f]_\alpha |t-t'|^{\frac{\beta}{2m}} \delta^{\frac{\alpha-\beta}{2m}} \end{aligned}$$

Es folgt also:

$$[f - f_\delta]_\beta \leq c[f]_\alpha \delta^{\frac{\alpha-\beta}{2m}} \to 0,$$

da $\beta < \alpha$.
Für δ hinreichend klein ist also $(-f_\delta)$ im Bild von P und es existiert $u_\delta \in X$ mit

$$P(u_\delta) = -f_\delta$$

Aufgrund der Definition von f_δ folgt:

$$\partial_t u_\delta - F(x,t,u_\delta,\dots,\nabla^{2m} u_\delta) = 0 \;\; \text{für} \;\; t < \delta$$

Also existiert eine Lösung für T hinreichend klein.

□

Kapitel 3

Biharmonischer Wärmefluß

3.1 Evolutionsgleichungen

Seien (M^m, g) und (N^n, h) glatte, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Levi-Civita Zusammenhängen ∇' und ∇, wobei zusätzlich $\partial M = \emptyset$ sein soll, und sei $u \in C^\infty(M, N)$. Desweiteren wird angenommen, daß die Krümmungstensoren R^M und R^N von M und N und ihre Ableitungen bis zur zweiten Ordnung beschränkt sind.
Man betrachte im Folgenden immer p-Formen längs u, d.h. Formen ω mit

$$\omega(x) : \underbrace{T_xM \times \ldots \times T_xM}_{p\text{-mal}} \to T_{u(x)}N \quad \forall \quad x \in M,$$

wobei hier mit Form eine multilineare Abbildung gemeint sein soll, welche nicht notwendig alternierend ist. Nun soll die kovariante Ableitung einer p-Form längs u definiert werden (siehe z.B. [Xin96], [EL78] oder [GKM75] für kovariante Ableitungen von Vektorfeldern längs einer Abbildung), welche aus einer p-Form eine $(p+1)$-Form macht. Dazu seien $X_1, \ldots, X_{p+1} \in \Gamma(TM)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} (\nabla\omega)(X_1, \ldots, X_{p+1}) \quad &:= \quad \nabla_{X_1}(\omega(X_2, \ldots, X_{p+1})) \\ &- \quad \sum_{k=2}^{p+1} \omega(X_2, \ldots, \nabla'_{X_1} X_k, \ldots, X_{p+1}) \end{aligned}$$

Im Folgenden wird nur noch ∇ für den Zusammenhang auf M geschrieben, da eine Verwechslung mit dem Zusammenhang auf N ausgeschlossen werden kann.
Damit können auch höhere Ableitungen von p-Formen längs u definiert werden:

$$\nabla^2_{X,Y}\omega = \nabla_X(\nabla_Y\omega) - \nabla_{\nabla_X Y}\omega$$

Ebenso kann der Krümmungstensor für p-Formen längs u definiert werden.

$$R^p(X, Y)\omega := \nabla^2_{X,Y}\omega - \nabla^2_{Y,X}\omega$$

Direkt aus der Definition erhält man:

$$\begin{aligned} (R^p(X, Y)\omega)(X_1, \ldots, X_p) \quad &= \quad R^N(Du(X), Du(Y))\omega(X_1, \ldots, X_p) \\ &- \quad \sum_{k=1}^{p} \omega(X_1, \ldots, R^M(X, Y)X_k, \ldots, X_p) \end{aligned}$$

Nun soll die zu ∇ adjungierte kovariante Ableitung $\nabla^\star$ einer p-Form längs u definiert werden, welche aus einer p-Form eine $(p-1)$-Form macht.

$$(\nabla^\star\omega)(X_1,\dots,X_{p-1}) := -(\nabla_{e_i}\omega)(e_i,X_1,\dots,X_{p-1})$$

Mit $\{e_i\}$ wird hier und im Folgenden immer ein Orthonormalbasisfeld von TM bezeichnet.

Bemerkung 3.1.1. *$\nabla^\star$ ist wohldefiniert, da gilt:*
Sei $e'_k = T^{ik}e_i$ ein zweites Orthonormalbasisfeld von TM mit $TT^t = id$, dann erhält man:

$$\begin{aligned}(\nabla_{e'_k}\omega)(e'_k,X_1,\dots,X_{p-1}) &= (\nabla_{T^{ik}e_i}\omega)(T^{jk}e_j,X_1,\dots,X_{p-1})\\ &= T^{ik}T^{jk}(\nabla_{e_i}\omega)(e_j,X_1,\dots,X_{p-1})\\ &= \delta^{ij}(\nabla_{e_i}\omega)(e_j,X_1,\dots,X_{p-1})\end{aligned}$$

Diese Definition zeigt, daß die Operatoren ∇ und $\nabla^\star$ adjungiert sind bezüglich des globalen Skalarproduktes

$$(\omega,\theta) := \int_M <\omega,\theta> dv_g,$$

wobei dv_g für das Volumenelement von M steht.
Als Nächstes wird der Laplace-Operator auf p-Formen längs u durch

$$\Delta\omega := \nabla^\star\nabla\omega$$

definiert.
Für die spätere Verwendung wird der Kommutator von $\nabla^\star$ und ∇ berechnet:

Lemma 3.1.2. *Sei α eine p-Form längs u, dann gilt:*

$$(\nabla\nabla^\star - \nabla^\star\nabla)\alpha = -\nabla^\star T + R^p(e_i,X_1)\alpha,$$

wobei $T(X_0,X_1,\dots,X_p) = (\nabla_{X_0}\alpha)(X_1,\dots,X_p) - (\nabla_{X_1}\alpha)(X_0,X_2,\dots,X_p)$.

Beweis:
Seien $X_1,\dots,X_p \in \Gamma(TM)$. Weiter sei $\{e_i\}$ ein lokales Orthonormalbasisfeld bei $q \in M$ und $\nabla X_i = 0$ in q fi£¡r alle $i \in \{1,\dots,p\}$. Im Punkt q berechnet man:

$$\begin{aligned}((\nabla\nabla^\star - \nabla^\star\nabla)\alpha)(X_1,\dots,X_p) &= \nabla_{e_i}((\nabla_{e_i}\alpha)(X_1,\dots,X_p))\\ &- \nabla_{X_1}((\nabla_{e_i}\alpha)(e_i,X_2,\dots,X_p))\\ &= (\nabla^2_{e_i,e_i}\alpha)(X_1,\dots,X_p)\\ &- (\nabla^2_{e_i,X_1}\alpha)(e_i,X_2,\dots,X_p)\\ &+ (\nabla^2_{e_i,X_1}\alpha)(e_i,X_2,\dots,X_p)\\ &- (\nabla^2_{X_1,e_i}\alpha)(e_i,X_2,\dots,X_p)\\ &= -(\nabla^\star T)(X_1,\dots,X_p)\\ &+ (R^p(e_i,X_1)\alpha)(e_i,X_2,\dots,X_p)\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung.

□

Später werden einige spezielle Vertauschungsformeln benötigt, die hier zur Verfügung gestellt

werden sollen. Dabei wird wieder im Punkt $p \in M$ gerechnet.
Der in dieser Arbeit stets auftretende Fall ist die Berechnung des Kommutators für p-Formen α mit $\alpha = \nabla\beta$, wobei β eine $(p-1)$-Form ist. In diesem Fall gilt:

$$T(X_0, X_1, \dots, X_p) = (R^{p-1}(X_0, X_1)\beta)(X_2, \dots, X_p)$$

Der erste zu betrachtende Fall ist $\alpha = Du$, dann folgt aus der Definition von T sogar $T = 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
|(\nabla\Delta u - \Delta Du)(X_1)| &\leq |(R^1(e_i, X_1)Du)(e_i)| \\
&\leq |R^N(Du(e_i), Du(X_1))Du(e_i)| \\
&+ |Du(R^M(e_i, X_1)e_i)| \\
&\leq c(|Du|^3 + |Du|)|X_1| \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Desweiteren benötigt man den Fall $\alpha = \nabla Du$, also $\beta = Du$, d.h.
$T(X_0, X_1, X_2) = (R^1(X_0, X_1)Du)(X_2)$.
Dafür berechnet man:

$$\begin{aligned}
|(\nabla\Delta Du - \Delta\nabla Du)(X_1, X_2)| &\leq |(R^2(e_i, X_1)\nabla Du)(e_i, X_2)| \\
&+ |\nabla_{e_i}((R^1(e_i, X_1)Du)(X_2))| \\
&\leq |R^N(Du(e_i), Du(X_1))\nabla Du(e_i, X_2)| \\
&+ |\nabla Du(R^M(e_i, X_1)e_i, X_2) \\
&+ \nabla Du(e_i, R^M(e_i, X_1)X_2)| \\
&+ |\nabla_{e_i}(R^N(Du(e_i), Du(X_1))Du(X_2))| \\
&+ |\nabla_{e_i}(Du(R^M(e_i, X_1)X_2))| \\
&\leq c(|Du|^2|\nabla Du| + |\nabla Du| \\
&+ |Du|^4 + |Du|)|X_1||X_2| \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Nun wird der Fall $\alpha = \nabla^2 Du$ betrachtet, also $\beta = \nabla Du$, d.h.
$T(X_0, X_1, X_2, X_3) = (R^2(X_0, X_1)\nabla Du)(X_2, X_3)$ und wie oben erhält man, indem man die Definition von R^3 bzw. R^2 einsetzt, dann ausdifferenziert und schließlich die Beschränktheit der ersten beiden Ableitungen von R^M bzw. R^N ausnutzt:

$$\begin{aligned}
|(\Delta\nabla^2 Du - \nabla\Delta\nabla Du)(X_1, X_2, X_3)| &\leq |(R^3(e_i, X_1)\nabla^2 Du)(e_i, X_2, X_3)| \\
&+ |\nabla_{e_i}((R^2(e_i, X_1)\nabla Du)(X_2, X_3))| \\
&\leq c(|Du|^2|\nabla^2 Du| + |\nabla^2 Du| \\
&+ |Du|^3|\nabla Du| + |Du||\nabla Du|^2 \\
&+ |\nabla Du|)|X_1||X_2||X_3| \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Nun der letzte zu betrachtende Fall:

$$\begin{aligned}
|(\nabla\Delta Du - \nabla^2\Delta u)(X_1, X_2)| &\leq |\nabla_{X_1}((\Delta Du - \nabla\Delta u)(X_2)| \\
&= |\nabla_{X_1}((R^1(e_i, X_1)Du)(e_i))| \\
&\leq c(|Du|^4 + |Du|^2|\nabla Du| \\
&+ |\nabla Du| + |Du|)|X_1||X_2| \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Damit hat man alle Formeln, die man später benötigt werden, um unter anderem von Abschätzungen an die L^2-Norm von $\nabla\Delta u$ auf die L^2-Norm von $\nabla^2 Du$ zu schließen.

Lösungen der Gleichung

$$\Delta u = -\nabla_{e_i} Du(e_i) = 0$$

heißen harmonische Abbildungen und sind kritische Punkte des Funktionals

$$E_1(u) = \frac{1}{2}\int_M |Du|^2 dv_g$$

Mehr über harmonische Abbildungen und den zugehörigen Wärmefluß findet man unter anderem in [EL78], [EL88], [ES64], [?], [SY97], [Str85], [Str88], [Str00], [Jos83], [Ham75] und [Top96].

Nun zur Definition der Bi-Energie.

Definition 3.1.3 (Bi-Energie)**.** *Sei $u \in C^\infty(M,N)$, dann definiert man die Bi-Energie $E_2(u)$ wie folgt:*

$$E_2(u) := \frac{1}{2}\int_M |\Delta u|^2 dv_g$$

Diese Definition entspricht beinahe der von Jiang in [Jia86b] gegebenen Definition. Er arbeitet lediglich im zurückgezogenen Tangentialbündel $u^{-1}TN$, (vgl. [Oni], [CMO01] und [CMO02]). Chang, Wang und Yang haben in ihrer Arbeit [CWY99] die Regularität von biharmonischen Abbildungen in Sphären untersucht. Allerdings betrachten sie als Energie den extrinsischen Laplace, also den Laplace-Beltrami Operator von (M,g), so daß sich die von ihnen betrachtete Energie von der hier betrachteten Energie um einen Term $\int_M |Du|^4 dv_g$ unterscheidet.
Nun soll die Euler-Lagrange Gleichung von $E_2(u)$ ausgerechnet werden. Dazu betrachte man C^∞-Abbildungen

$$u_t : M \to N, \quad t \in I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon), \quad \epsilon > 0$$

mit

$$u_0 = u, \quad \frac{\partial u_t}{\partial t}|_{t=0} = V$$

Auf $M \times I_\epsilon$ wähle man ein Orthonormalbasisfeld $\{e_i, \frac{\partial}{\partial t}\}$, so daß im Punkt p gilt:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = 0,\ \nabla_{e_i} e_j = \nabla_{e_i} e_j = 0,\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i = \nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Satz 3.1.4 (Euler-Lagrange Gleichung von $E_2(u)$)**.** *Sei u_t wie oben, dann gilt:*

$$\frac{d}{dt} E_2(u_t)|_{t=0} = \int_M < \Delta^2 u + R^N(Du(e_i), \Delta u) Du(e_i), V > dv_g$$

Beweis:
Es wird gemäß der Arbeit von Jiang [Jia86b] vorgegangen, aber seine Berechnungen der hier

gegebenen Definition angeglichen.
Zunächst soll eine Identität für den Krümmungstensor R^1 im Punkt p berechnet werden:

$$\begin{aligned}(R^1(X, \frac{\partial}{\partial t})Du_t)(Y) &= R^N(Du_t(X), \partial_t u_t))Du_t(Y) \\ &- Du_t(R^{M\times I_\epsilon}(X, \frac{\partial}{\partial t})Y) \\ &= R^N(Du_t(X), \partial_t u_t)Du_t(Y), \quad \forall X, Y \in T_pM\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_2(u_t) &= \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\int_M < (\nabla_{e_i} Du_t)(e_i), (\nabla_{e_j} Du_t)(e_j) > dv_g) \\ &= \int_M < \partial_t((\nabla_{e_i} Du_t)(e_i)), (\nabla_{e_j} Du_t)(e_j) > dv_g\end{aligned}$$

Berechnung im Punkt p:

$$\begin{aligned}\partial_t((\nabla_{e_i} Du_t)(e_i)) &= (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{e_i} Du_t)(e_i) \\ &= (\nabla_{e_i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Du_t - \nabla_{[e_i, \frac{\partial}{\partial t}]} Du_t - R^1(e_i, \frac{\partial}{\partial t})Du_t)(e_i) \\ &= \nabla_{e_i}((\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Du_t)(e_i)) - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Du_t)(\nabla_{e_i} e_i) \\ &- R^N(Du_t(e_i), \partial_t u_t)Du_t(e_i) \\ &= \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\partial_t u_t - R^N(Du_t(e_i), \partial_t u_t)Du_t(e_i)\end{aligned}$$

Da der Laplace-Operator selbstadjungiert ist, gilt:

$$\begin{aligned}\int_M &< \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\partial_t u_t, (\nabla_{e_j} Du_t)(e_j) > dv_g \\ &= \int_M < \partial_t u_t, \nabla_{e_k}\nabla_{e_k}((\nabla_{e_j} Du_t)(e_j)) > dv_g\end{aligned}$$

Zusammengefaßt betrachtet:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_2(u_t)|_{t=0} &= (\int_M < \nabla_{e_k}\nabla_{e_k}((\nabla_{e_j} Du_t)(e_j)), \partial_t u_t > dv_g \\ &- \int_M < R^N(Du_t(e_i), \partial_t u_t)Du_t(e_i), \nabla_{e_j} Du_t)(e_j) > dv_g)|_{t=0} \\ &= \int_M < -\nabla_{e_k}\nabla_{e_k}\Delta u + R^N(Du(e_i), \Delta u)Du(e_i), V > dv_g\end{aligned}$$

Dies entspricht der Behauptung.

□

Definition 3.1.5 (Biharmonische Abbildungen)**.** *Sei $u \in C^\infty(M, N)$ Lösung von*

$$\Delta^2 u + R^N(Du(e_i), \Delta u)Du(e_i) = 0,$$

dann heißt u biharmonische Abbildung.

Mou untersucht in [Mou00] biharmonische Abbildungen von einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ mit Rand in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit N mit Dirichletranddaten. Bei einer Gleichung vierter Ordnung heißt dies, daß die Funktion und die Normalenableitung der Funktion auf $\partial\Omega$ vorgegeben sind. Unter anderem hat er im Fall $m = 1$ bewiesen, daß biharmonische Kurven zu vorgegebenen Dirichletrandwerten existieren.
Caddeo, Montaldo und Oniciuc untersuchen in [CMO02] bzw. [CMO01] biharmonische Untermannigfaltigkeiten von S^3 bzw. S^n. Dabei heißt eine Mannigfaltigkeit $M \overset{i}{\hookrightarrow} N$ biharmonische Untermannigfaltigkeit von N, falls $i : M \to N$ eine biharmonische Abbildung ist. Jiang hat dazu in [Jia86a] und [Jia86b] bereits festgestellt, daß der Clifford Torus

$$S^p(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^q(\frac{1}{\sqrt{2}}) \hookrightarrow S^{n+1}$$

mit $p + q = n$ und $p \neq q$ eine nicht-harmonische biharmonische Untermannigfaltigkeit von S^{n+1} ist.

Mit Hilfe der oben gegebenen Definition sieht man sofort, daß jede harmonische Abbildung biharmonisch ist. Umgekehrt hat Jiang [Jia86b] mit Hilfe der Bochneridentität bewiesen, daß, falls die Schnittkrümmung κ_N von N nichtpositiv ist, jede biharmonische Abbildung auch harmonisch ist. Hier soll ein einfacher Beweis dieser bemerkenswerten Tatsache präsentiert werden:

Satz 3.1.6. *Sei $u \in C^\infty(M, N)$ eine biharmonische Abbildung und $\kappa_N \leq 0$, dann ist u eine harmonische Abbildung.*

Beweis:
Durch Testen der Gleichung für u mit Δu erhält man:

$$\begin{aligned} \int_M < \Delta^2 u, \Delta u > dv_g &= -\int_M < R^N(Du(e_i), \Delta u)Du(e_i), \Delta u > dv_g \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_M |\nabla \Delta u|^2 dv_g \leq 0,$$

also

$$\nabla \Delta u = 0$$

auf M.
Und aus

$$e_i(< \Delta u, Du(e_i) >) = -|\Delta u|^2 + < \nabla_{e_i} \Delta u, Du(e_i) >$$

folgt mit Hilfe des Satzes von Stokes $\Delta u = 0$, also die Behauptung.

$\square$

Die Arbeit befaßt sich im Folgenden mit dem zu biharmonischen Abbildungen gehörenden negativen Gradientenfluß, d.h. es werden Abbildungen

$$u : M \times [0, T) \to N$$

betrachtet, welche das folgende Differentialgleichungssystem lösen:

(1) $\partial_t u = -\Delta^2 u - R^N(Du(e_i), \Delta u)Du(e_i)$

$u(\cdot, 0) = u_0,$

wobei $u_0 \in C^\infty(M, N)$.
Falls nun u eine glatte Lösung von (1) ist, erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_2(u) &= \int_M < \partial_t \Delta u, \Delta u > dv_g \\
&= -\int_M < \partial_t \nabla_{e_i} Du(e_i), \Delta u > dv_g \\
&= -\int_M < \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\partial_t u - R^N(Du(e_i), \partial_t u)Du(e_i), \Delta u > dv_g \\
&= \int_M < \partial_t u, \Delta^2 u > dv_g \\
&+ \int_M < R^N(Du(e_i), \partial_t u)Du(e_i), \Delta u > dv_g \\
&= \int_M < \Delta^2 u + R^N(Du(e_i), \Delta u)Du(e_i), \partial_t u > dv_g \\
&= -\int_M < \partial_t u, \partial_t u > dv_g
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt:

Lemma 3.1.7. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses, dann gilt für alle $t_0 \in (0,T)$:*

$$\int_0^{t_0} \int_M |\partial_t u|^2 dv_g + E_2(u(t_0)) = E_2(u_0)$$

□

Nun soll berechnet werden, wie sich $E_1(u)$ unter dem biharmonischen Wärmefluß verhält.

Lemma 3.1.8. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses, dann gilt:*

$$\frac{d}{dt}E_1(u) = -\int_M |\nabla \Delta u|^2 dv_g + \int_M < R^N(Du(e_i), \Delta u)\Delta u, Du(e_i) > dv_g$$

Speziell gilt also für $\kappa_N \leq 0$:

$$\frac{d}{dt}E_1(u) \leq -\int_M |\nabla \Delta u|^2 dv_g \leq 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_1(u) &= \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\int_M |Du|^2 dv_g) \\
&= \int_M < \partial_t u, \Delta u > dv_g \\
&= -\int_M < \Delta^2 u, \Delta u > dv_g \\
&- \int_M < R^N(Du(e_i), \Delta u) Du(e_i), \Delta u > dv_g \\
&= -\int_M |\nabla \Delta u|^2 dv_g + \int_M < R^N(Du(e_i), \Delta u)\Delta u, Du(e_i) > dv_g
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

□

3.2 Energieabschätzungen

Um im nächsten Abschnitt die Langzeitexistenz und Sub-Konvergenz des biharmonischen Wärmeflusses zu zeigen, wird in diesem Abschnitt eine in der Zeit lokale Abschätzung der $W^{4,2}(M,N)$-Norm von Lösungen $u : M \times [0,T) \to N$ des biharmonischen Wärmeflusses bewiesen, welche nur von M, N und u_0 abhängt. Indem man die Zielmannigfaltigkeit N isometrisch in $\mathbb{R}^k$ einbettet, was mit Hilfe des Satzes von Nash-Moser stets möglich ist, erhält man eine Abschätzung an die $W^{4,2}(M,\mathbb{R}^k)$-Norm von Lösungen $u : M \times \mathbb{R} \to N$ des biharmonischen Wärmeflusses für alle Zeiten $t \in (0,T)$. Aus dem Sobolevschen Einbettungssatz (siehe z.B. [GT01] und [Alt99]) erhält man in der Folge, daß der biharmonische Wärmefluß für $t \in (0,T)$ein lineares parabolisches Differentialgleichungssystem mit α-hölderstetigen Koeffizienten ist. Damit kann die klassische Schaudertheorie angewandt werden und man erhält die höhere Regularität der Lösung. Um die $W^{4,2}$-Norm von u abzuschätzen, wird Struwes Vorgehensweise beim harmonischen Wärmefluß [Str85] oder Yang-Mills Fluß [Str94] (siehe [Råd92], wo der Yang-Mills Fluß in den subkritischen Fällen $m = 2, 3$ betrachtet wird) gewählt. Dziuk, Kuwert und Schätzle argumentieren in [DKS02], [KS01] und [KS02] im Fall des "Curve straightening flow" und des Willmore Flusses auch mit L^2-Abschätzungen. Allerdings verwenden sie zusätzlich Interpolationsabschätzungen, d.h. im einen Fall arbeiten sie mit der Gagliardo-Nirenberg Abschätzung und im anderen Fall verwenden sie eine Art Interpolationsabschätzung, wie sie auch von Hamilton in [Ham82] verwendet wurde. Diese Interpolationsabschätzungen sind in dieser Arbeit nicht nötig, da hier nur der subkritische Fall, d.h. die Dimensionen $m \in \{1, 2, 3\}$ betrachtet werden und sich dadurch die wichtigen Normen mit Hilfe der Sobolevabschätzung kontrollieren lassen.

Bemerkung 3.2.1. *Im Folgenden gelte im Fall $m \in \{2, 3\}$ und $\kappa_N \nleq 0$:*

$$\int_M |Du|^4 dv_g \leq c \quad \forall t \in (0, \infty),$$

wobei hier und im Folgenden c eine Konstante bezeichnet, welche von M, N, $E_1(u_0)$ und $E_2(u_0)$ abhï£¡ngen kann.

Als eine einfache Konsequenz erhält man damit eine Abschätzung an die volle zweite kovariante Ableitung von u. Zusätzlich erhält man eine Abschätzung an die zweite extrinsische Ableitung von u. Diese beiden Tatsachen werden nun im Folgenden bewiesen.

Lemma 3.2.2. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{2, 3\}$, dann gilt für alle $t \in (0,T)$:*

$\int_M |\nabla Du|^2 dv_g \leq c.$

Beweis:

Die Aussage folgt direkt aus Lemma (3.1.8), der obigen Bemerkung und der Abschätzung

$$\begin{aligned}
\int_M |\Delta u|^2 &= \int_M < \nabla_{e_i} Du(e_i), \nabla_{e_j} Du(e_j) > \\
&= -\int_M < \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} Du(e_i), Du(e_j) > \\
&= -\int_M < \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} Du(e_i), Du(e_j) > \\
&- \int_M < R^N(Du(e_j), Du(e_i)) Du(e_i), Du(e_j) > \\
&\geq \int_M |\nabla Du|^2 - \int_M < R^N(Du(e_j), Du(e_i)) Du(e_i), Du(e_j) >
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.2.3. *Im Fall $m = 1$ gilt $E_2(u) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla Du|^2 dv_g$. Also ist in diesem Fall die volle zweite kovariante Ableitung bereits mit Hilfe von Lemma* (3.1.7) *abgeschätzt.*

Eine einfache Anwendung des Sobolevschen Einbettungssatzes liefert nun:

Lemma 3.2.4. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses, dann gilt für alle $t \in (0,T)$:*

$||Du||_{L^\infty} \leq c$ *für* $m = 1$,

$||Du||_{L^q} \leq c \ \forall q < \infty$ *und* $m = 2$,

$||Du||_{L^6} \leq c$ *für* $m = 3$.

Beweis:
Definiere $f : M \to \mathbb{R}$ durch $f := |Du|$, dann folgt mit Hilfe des Sobolevschen Einbettungssatzes (siehe [Alt99])

$W^{1,2} \hookrightarrow L^\infty$ für $m = 1$,

$W^{1,2} \hookrightarrow L^q \ \forall q < \infty$ und $m = 2$,

$W^{1,2} \hookrightarrow L^6$ für $m = 3$,

sowie Kato's Ungleichung ($D|Du| \leq |\nabla Du|$, siehe [Aub98]), Lemma (3.2.2), Bemerkung (3.2.3). Daraus folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 3.2.5. *Von nun seien zusätzlich zu den Voraussetzungen an die Krümmungen R^M bzw. R^N von M bzw. N die folgenden Voraussetzungen an die zweite Fundamentalform $A(u(x)) : T_{u(x)}N \times T_{u(x)}N \to T^\perp_{u(x)}N \subset \mathbb{R}^k$ der Einbettung $N \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ gestellt:*
Sowohl A als auch die ersten beiden Ableitungen von A seien gleichmäßig beschränkt.

Damit erhält man eine Abschätzung an die volle extrinsische zweite Ableitung.

Lemma 3.2.6. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses, dann gilt für alle $t \in (0,T)$:*

$$\int_M |D^2 u|^2 dv_g \leq c.$$

Beweis:
Es gilt

$$|D^2 u| \leq |\nabla Du| + |A(u)(Du, Du)| \leq c(|\nabla Du| + |Du|^2)$$

Damit folgt aus Lemma (3.2.2.), Bemerkung (3.2.3) und Lemma (3.2.4) die Behauptung.

□

Lemma 3.2.7. *Sei ω eine p-Form längs u, $u \in C^\infty(M,N)$ und $m \in \{1,2,3\}$, dann gilt:*

$$\int_M |\omega|^3 dv_g \leq c(\int_M |\omega|^2 dv_g)^3 + \epsilon \int_M |\nabla \omega|^2 dv_g + c$$

Beweis:
In den Dimensionen $m \in \{1,2,3\}$ hat man die Sobolevungleichung für reelwertige Funktionen f (siehe [Råd92]):

$$(\int_M |f|^6 dv_g)^{\frac{1}{3}} \leq c \int_M (|Df|^2 + |f|^2) dv_g$$

Damit kann folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
\int_M |\omega|^3 &\leq (\int_M |\omega|^2)^{\frac{3}{4}} (\int_M |\omega|^6)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq c(\int_M |\omega|^2)^3 + \epsilon(\int_M |\omega|^6)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq c(\int_M |\omega|^2)^3 + c\epsilon \int_M (|\nabla \omega|^2 + |\omega|^2)
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile geht Kato's Ungleichung ein.

□

Bemerkung 3.2.8. *Im weiteren Verlauf der Arbeit wird eine Abschätzung wie im vorherigen Lemma öfter benötigt. Es wird jedoch der erste Term mit einem kleinen Faktor versehen. Bei näherer Betrachtung des Beweisvorgangs sieht man schnell, daß dies kein Problem darstellt.*

Mit den nun zur Verfügung stehenden Abschätzungen kann man sich der Abschätzung von $\int_0^T \int_M |\nabla^2 Du|^2 dv_g dt$ zuwenden:

Lemma 3.2.9. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{1,2,3\}$, dann gilt:*

$$\int_0^T \int_M |\nabla \Delta u|^2 dv_g dt \leq cT + c$$

Beweis:
Mit Hilfe von Lemma (3.1.7), (3.1.8), (3.2.4) und (3.2.7) schließt man:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_M |\nabla \Delta u|^2 &\leq c + c\int_0^T \int_M |Du|^2 |\Delta u|^2 \\
&\leq c + c\int_0^T (\int_M |Du|^6)^{\frac{1}{3}} (\int_M |\Delta u|^3)^{\frac{2}{3}} \\
&\leq c + cT + c\int_0^T (\int_M |\Delta u|^2)^2 + c\epsilon \int_0^T \int_M |\nabla \Delta u|^2 \\
&\leq c + cT + c\epsilon \int_0^T \int_M |\nabla \Delta u|^2
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

□

Um die vollen kovarianten Ableitungen dritter Ordnung abzuschätzen, finden einige Kommutationsregeln für ∇ und $\nabla^\star$ Verwendung.

Lemma 3.2.10. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{1,2,3\}$, dann gilt für alle $t \in (0,T)$:*

$$\int_M |\nabla^2 Du|^2 dv_g \leq c + c\int_M |\nabla \Delta u|^2$$

Beweis:
Unter Verwendung von Abschätzung (3.2), Lemma (3.2.2), (3.2.4), (3.2.7) sowie Bemerkung (3.2.3) gilt:

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla^2 Du|^2 &= \int_M < \nabla^\star \nabla^2 Du, \nabla Du > \\
&\leq \int_M < \nabla \nabla^\star \nabla Du, \nabla Du > \\
&+ c\int_M (|Du|^2 |\nabla Du|^2 + |\nabla Du|^2 + |Du|^4 |\nabla Du| + |Du||\nabla Du|) \\
&\leq c + \int_M |\Delta Du|^2 + c(\int_M |Du|^6)^{\frac{1}{3}} (\int_M |\nabla Du|^3)^{\frac{2}{3}} \\
&+ c(\int_M |Du|^6)^{\frac{2}{3}} (\int_M |\nabla Du|^3)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq c + \int_M |\Delta Du|^2 + \epsilon \int_M |\nabla^2 Du|^2
\end{aligned}$$

Weiter folgt durch zweimaliges Anwenden der Abschätzung (3.1):

$$\begin{aligned}
\int_M |\Delta Du|^2 &= \int_M < \nabla^\star \nabla Du, \Delta Du > \\
&\leq \int_M < \nabla \Delta u, \Delta Du > + c \int_M (|Du|^3 |\Delta Du| + |Du||\Delta Du|) \\
&\leq \int_M |\nabla \Delta u|^2 + c \int_M |Du|^3 (|\Delta Du| + |\nabla \Delta u|) \\
&+ c \int_M |Du|(|\Delta Du| + |\nabla \Delta u|) \\
&\leq c + 2 \int_M |\nabla \Delta u|^2 + c \int_M |Du|^6 + \epsilon \int_M |\nabla^2 Du|^2
\end{aligned}$$

Durch Kombination dieser beiden Abschätzungen erhält man die Behauptung.

□

Indem man Lemma (3.2.4) und Lemma (3.2.9) anwendet, erhält man:

Lemma 3.2.11. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0, T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{1, 2, 3\}$, dann gilt:*

$$\int_0^T \int_M |\nabla^2 Du|^2 dv_g dt \leq cT + c$$

□

Nun kann mit Hilfe der vorangegangenen Lemmata $\int_0^T \int_M |D^3 u|^2 dv_g dt$ abgeschätzt werden:

Lemma 3.2.12. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0, T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{1, 2, 3\}$, dann gilt:*

$$\int_0^T \int_M |D^3 u|^2 dv_g dt \leq cT + c$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
D^3 u &= D(D^2 u) = D(\nabla Du + A(u)(Du, Du)) \\
&= \nabla^2 Du + A(u)(Du, \nabla Du) \\
&+ (DA(u))(Du, Du, Du) + 2A(u)(\nabla Du, Du),
\end{aligned}$$

wobei für ein Vektorfeld V längs u Folgendes benutzt wurde (s. [Wil93]):

$$|DV| = |\nabla V - A(u)(Du, V)| \leq |\nabla V| + c|Du||\nabla V|$$

Damit hat man unter Verwendung von Lemma (3.2.2), (3.2.4) und (3.2.7) sowie Bemerkung (3.2.3):

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_M |D^3 u|^2 &\leq \int_0^T \int_M |\nabla^2 Du|^2 \\
&+ c \int_0^T \int_M |Du|^6 + c \int_0^T \int_M |Du|^2 |\nabla Du|^2 \\
&\leq cT + c \int_0^T (\int_M |Du|^6)^{\frac{1}{3}} (\int_M |\nabla Du|^3)^{\frac{2}{3}} \\
&\leq cT + c \int_0^T \int_M |\nabla^2 Du|^2
\end{aligned}$$

□

Nun kann $\Delta^2 u$ abgeschätzt werden.

Lemma 3.2.13. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{1,2,3\}$, dann gilt:*

$$\int_0^T \int_M |\Delta^2 u|^2 dv_g dt \leq cT + c$$

Beweis:
Indem man die Gleichung mit $\Delta^2 u$ testet, erhält man unter Verwendung von Lemma (3.1.7), (3.2.4) und (3.2.9) sowie der Sobolevungleichung aus Lemma (3.2.7):

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_M |\Delta^2 u|^2 &+ \int_0^T \int_M < \partial_t u, \Delta^2 u > \\
&\leq c \int_0^T \int_M |Du|^2 |\Delta u| |\Delta^2 u| \\
&\leq c \int_0^T (\int_M |Du|^6)^{\frac{2}{3}} (\int_M |\Delta u|^6)^{\frac{1}{3}} \\
&+ \epsilon \int_0^T \int_M |\Delta^2 u|^2 \\
&\leq \epsilon \int_0^T \int_M |\Delta^2 u|^2 + c \int_0^T \int_M (|\nabla \Delta u|^2 + |\Delta u|^2) \\
&\leq cT + c + \epsilon \int_0^T \int_M |\Delta^2 u|^2
\end{aligned}$$

Zusätzlich gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_M < \partial_t u, \Delta^2 u > &= \int_0^T \int_M \partial_t |\Delta u|^2 \\
&+ \int_0^T \int_M < R^N(Du, \partial_t u) Du, \Delta u >
\end{aligned}$$

Und weiter gilt mit Lemma (3.1.7), (3.2.4), (3.2.9) und der Sobolevungleichung aus Lemma

(3.2.7):

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_M < R^N(Du, \partial_t u)Du, \Delta u > &\leq c\int_0^T \int_M |\Delta^2 u||Du|^2|\Delta u| \\
&+ c\int_0^T \int_M |Du|^4|\Delta u|^2 \\
&\leq \epsilon \int_0^T \int_M |\Delta^2 u|^2 \\
&+ c\int_0^T (\int_M |Du|^6)^{\frac{2}{3}}(\int_M |\Delta u|^6)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq \epsilon \int_0^T \int_M |\Delta^2 u|^2 \\
&+ c\int_0^T \int_M (|\nabla\Delta u|^2 + |\Delta u|^2) \\
&\leq \epsilon \int_0^T \int_M |\Delta^2 u|^2 + cT + c
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

□

Ähnlich wie oben kann damit eine Abschätzung für $\nabla^4 u$ bzw. $D^4 u$ bewiesen werden.

Lemma 3.2.14. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{1,2,3\}$, dann gilt für alle $t \in (0,T)$:*

$$\int_M |\nabla^3 Du|^2 dv_g \leq c + c\int_M |\Delta^2 u|^2 dv_g$$

Beweis:
Mit Hilfe der Abschätzung (3.3), Lemma (3.2.2) und Bemerkung (3.2.3) folgt:

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla^3 Du|^2 &= \int_M < \Delta\nabla^2 Du, \nabla^2 Du > \\
&\leq \int_M < \nabla\Delta\nabla Du, \nabla^2 Du > \\
&+ c\int_M (|Du|^2|\nabla^2 Du|^2 + |\nabla^2 Du|^2 + |Du|^3||\nabla Du||\nabla^2 Du| \\
&+ |Du||\nabla Du|^2|\nabla^2 Du| + |\nabla Du||\nabla^2 Du|) \\
&\leq c + \int_M |\Delta\nabla Du|^2 + \epsilon\int_M |\nabla^3 Du|^2 \\
&+ c\int_M (|Du|^2|\nabla^2 Du|^2 + |Du|^3||\nabla Du||\nabla^2 Du| \\
&+ |Du||\nabla Du|^2|\nabla^2 Du|) \\
&=: c + \int_M |\Delta\nabla Du|^2 + \epsilon\int_M |\nabla^3 Du|^2 \\
&+ I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

Nun schätzt man mit Hilfe von Lemma (3.2.2), (3.2.4) und den Bemerkungen (3.2.3), (3.2.8) ab:

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq c(\int_M |Du|^6)^{\frac{1}{3}}(\int_M |\nabla^2 Du|^3)^{\frac{2}{3}} \\
&\leq c + \epsilon(\int_M |\nabla^2 Du|^2)^2 + c(\int_M |\nabla^3 Du|^2)^{\frac{2}{3}} \\
&\leq c + \epsilon(\int_M |\nabla^3 Du|^2)(\int_M |\nabla Du|^2) \\
&+ \epsilon \int_M |\nabla^3 Du|^2 \\
&\leq c + c\epsilon \int_M |\nabla^3 Du|^2
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung von Lemma (3.2.2), (3.2.4), (3.2.7), der Sobolevungleichung aus Lemma (3.2.7) und Bemerkung (3.2.3) folgt:

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq c(\int_M |Du|^6)^{\frac{1}{2}}(\int_M |\nabla Du|^3)^{\frac{1}{3}}(\int_M |\nabla^2 Du|^6)^{\frac{1}{6}} \\
&\leq c(\int_M |\nabla Du|^3)^{\frac{2}{3}} + \epsilon(\int_M |\nabla^2 Du|^6)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq c + \epsilon \int_M |\nabla^3 Du|^2
\end{aligned}
$$

Schließlich wird I_3 mittels Lemma (3.2.2), (3.2.4), der Sobolevungleichung aus Lemma (3.2.7) und den Bemerkungen (3.2.3) und (3.2.8) abgeschätzt:

$$
\begin{aligned}
I_3 &\leq c(\int_M |Du|^6)^{\frac{1}{6}}(\int_M |\nabla Du|^4)^{\frac{1}{2}}(\int_M |\nabla^2 Du|^3)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq \epsilon \int_M |\nabla Du|^4 + c(\int_M |\nabla^2 Du|^3)^{\frac{2}{3}} \\
&\leq c + c\epsilon(\int_M |\nabla Du|^6)^{\frac{2}{3}} + \epsilon(\int_M |\nabla^2 Du|^2)^2 + c(\int_M |\nabla^3 Du|^2)^{\frac{2}{3}} \\
&\leq c + c\epsilon(\int_M |\nabla^2 Du|^2)^2 + \epsilon \int_M |\nabla^3 Du|^2 \\
&\leq c + c\epsilon \int_M |\nabla^3 Du|^2
\end{aligned}
$$

Weiter folgt mit Abschätzung (3.2) und Lemma (3.2.2), (3.2.4), der Sobolevungleichung aus

Lemma (3.2.7) und der Bemerkung (3.2.3):

$$\begin{aligned}
\int_M |\Delta\nabla Du|^2 &\leq \int_M < \Delta\nabla Du, \nabla\Delta Du > \\
&+ c\int_M (|Du|^2|\nabla Du||\Delta\nabla Du| + |\nabla Du||\Delta\nabla Du| \\
&+ |Du|^4|\Delta\nabla Du| + |Du||\Delta\nabla Du|) \\
&\leq \int_M < \Delta\nabla Du, \nabla\Delta Du > \\
&+ c + \epsilon\int_M |\nabla^3 Du|^2 + c\int_M |Du|^8 \\
&+ c(\int_M |Du|^6)^{\frac{2}{3}}(\int_M |\nabla Du|^6)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq \int_M < \Delta\nabla Du, \nabla\Delta Du > \\
&+ c + \epsilon\int_M |\nabla^3 Du|^2 \\
&+ c\int_M |Du|^8
\end{aligned}$$

Nun schätzt man unter Verwendung von Lemma (3.2.2), (3.2.4) und (3.2.7), angewandt auf $|\omega| = |Du|^3$ sowie der Sobolevungleichung aus Lemma (3.2.7) und der Bemerkung (3.3.3) weiter ab

$$\begin{aligned}
\int_M |Du|^8 &\leq c(\int_M |Du|^6)^{\frac{1}{3}}(\int_M |Du|^9)^{\frac{2}{3}} \\
&\leq c + c(\int_M |Du|^6)^2 + \epsilon(\int_M |Du|^4|\nabla Du|^2)^{\frac{2}{3}} \\
&\leq c + \epsilon(\int_M |Du|^6)^{\frac{4}{9}}(\int_M |\nabla Du|^6)^{\frac{2}{9}} \\
&\leq c + c\epsilon\int_M |\nabla^2 Du|^2 \\
&\leq c + \epsilon\int_M |\nabla^3 Du|^2
\end{aligned}$$

Weiter folgt mit Abschätzung (3.4) und den vorherigen Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
\int_M < \Delta\nabla Du, \nabla\Delta Du > &\leq \int_M < \Delta\nabla Du, \nabla^2\Delta u > \\
&+ c\int_M (|Du|^4|\Delta\nabla Du| + |Du|^2|\nabla Du||\Delta\nabla Du| \\
&+ |\nabla Du||\Delta\nabla Du| + |Du||\Delta\nabla Du|) \\
&\leq \int_M < \Delta\nabla Du, \nabla^2\Delta u > \\
&+ c + \epsilon\int_M |\nabla^3 Du|^2
\end{aligned}$$

Durch nochmalige Anwendung der Abschätzungen des zweiten Kommutatorarguments in diesem Lemma, wobei $\Delta\nabla Du$ ersetzt wird durch $\nabla^2\Delta u$, folgt:

$$\begin{aligned}\int_M < \Delta\nabla Du, \nabla^2\Delta u > &\leq \int_M < \nabla\Delta Du, \nabla^2\Delta u > \\ &+ c + \epsilon\int_M |\nabla^3 Du|^2\end{aligned}$$

Die Abschätzungen des dritten Kommutatorarguments angewandt auf $\nabla^2\Delta u$ statt $\Delta\nabla Du$ liefern:

$$\begin{aligned}\int_M < \nabla\Delta Du, \nabla^2\Delta u > &\leq \int_M < \nabla^2\Delta u, \nabla^2\Delta u > \\ &+ c + \epsilon\int_M |\nabla^3 Du|^2\end{aligned}$$

Nun findet nochmals wie im ersten Kommutatorargument Abschätzung (3.3) Anwendung, wobei zu bemerken ist, daß die Kommutatorformel diesmal auf die 1-Form $\nabla\Delta u$ angewandt wird.

$$\begin{aligned}\int_M < \Delta\nabla\Delta u, \nabla\Delta u > &\leq \int_M |\Delta^2 u|^2 \\ &+ c + \epsilon\int_M |\nabla^3 Du|^2\end{aligned}$$

Indem man nun alle Abschätzungen zusammenfaßt folgt die Behauptung.

□

Die Kombination von Lemma (3.2.13) und Lemma (3.2.14) liefert:

Lemma 3.2.15. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{1,2,3\}$, dann gilt:*

$$\int_0^T \int_M |\nabla^3 Du|^2 dv_g dt \leq cT + c$$

□

Nun zu $D^4 u$:

Lemma 3.2.16. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{1,2,3\}$, dann gilt für alle $t \in (0,T)$:*

$$\int_M |D^4 u|^2 dv_g \leq c + c\int_M |\nabla^3 Du|^2 dv_g$$

Beweis:
Wie in Lemma (3.2.12) erhält man:

$$\begin{aligned}D^4 u &= D(D^3 u) \\ &= D(\nabla^2 Du + 3A(u)(Du, \nabla Du) \\ &+ (DA(u))(Du, Du, Du)) \\ &= \nabla^3 Du + 4A(u)(Du, \nabla^2 Du) + 3A(u)(\nabla Du, \nabla Du) \\ &+ 6(DA(u))(Du, Du, \nabla Du) + (D^2 A(u))(Du, Du, Du, Du)\end{aligned}$$

Aus Lemma (3.2.2), (3.2.4), der Sobolevungleichung aus Lemma (3.2.7) und der Abschätzung an $\int_M |Du|^8$ aus Lemma (3.2.14) folgt:

$$\begin{aligned}
\int_M |D^4u|^2 &\leq c\int_M |\nabla^3 Du|^2 + c\int_M |Du|^2|\nabla^2 Du|^2 \\
&+ c\int_M |\nabla Du|^4 + c\int_M |Du|^4|\nabla Du|^2 + c\int_M |Du|^8 \\
&\leq c\int_M |\nabla^3 Du|^2 + c(\int_M |Du|^4)^{\frac{2}{3}}(\int_M |\nabla^2 Du|^6)^{\frac{1}{3}} \\
&+ c + c(\int_M |\nabla^2 Du|^2)^2 + c(\int_M |Du|^6)^{\frac{2}{3}}(\int_M |\nabla^2 Du|^6)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq c + c\int_M |\nabla^3 Du|^2
\end{aligned}$$

□

Die Kombination von Lemma (3.2.15) mit Lemma (3.2.16) liefert:

Lemma 3.2.17. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{1,2,3\}$, dann gilt:*

$$\int_0^T \int_M |D^4u|^2 dv_g dt \leq cT + c$$

□

Nun benötigt man eine Abschätzung an $\int_M |\Delta^2 u(\cdot,t)|^2 dv_g$ unabhängig von t, um die höhere Regularität zu erhalten. Dazu schätzt man zunächst $\int_M |\partial_t u|^2 dv_g$ ab.

$$M_s^t := M \times [s,t]$$

Lemma 3.2.18. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{1,2,3\}$, dann existiert ein $0 < \delta < T$, so daß für $t < \delta$ gilt:*

$$\sup_{0\leq t'\leq t} \int_M |\partial_t u|^2 dv_g \leq c\int_M |\partial_t u|^2 dv_g|_{t=0} + c,$$

mit $\delta = \delta(E_1(u_0), E_2(u_0), M, N)$.

Beweis:

Die Gleichung wird nach t differenziert und dann mit $\partial_t u$ getestet. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{M_0^t} \partial_t|\partial_t u|^2 &+ \int_{M_0^t} < \partial_t \Delta^2 u, \partial_t u > \\
&= \int_{M_0^t} < \partial_t(R^N(Du,\Delta u)Du), \partial_t u > \\
&\leq c\int_{M_0^t} (|\partial_t u|^2|Du|^2|\Delta u| + |\partial_t u||\nabla\partial_t u||Du||\Delta u| \\
&+ |\partial_t u||Du|^2|\partial_t \Delta u|) \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Ableitungen gilt zusätzlich:

$$
\begin{aligned}
\int_{M_0^t} <\partial_t\Delta^2 u, \partial_t u> &= \int_{M_0^t} (<\partial_t\nabla\Delta u, \nabla\partial_t u> \\
&+ <R^N(\partial_t u, Du)\nabla\Delta u, \partial_t u>) \\
&= \int_{M_0^t} <\partial_t\Delta u, \Delta\partial_t u> \\
&+ \int_{M_0^t} <R^N(\partial_t u, Du)\Delta u, \nabla\partial_t u> + I_4 \\
&= \int_{M_0^t} |\Delta\partial_t u|^2 \\
&+ \int_{M_0^t} <R^N(\partial_t u, Du)Du, \Delta\partial_t u> + I_4 + I_5 \\
&= \int_{M_0^t} |\Delta\partial_t u|^2 + I_4 + I_5 + I_6
\end{aligned}
$$

Sei nun ohne Einschränkung $\sup_{0\le t'\le t}(\int_M |\partial_t u|^2) = \int_M |\partial_t u|^2|_{t'=t}$. Es kann mit Hilfe von Lemma (3.1.7), (3.2.4), (3.2.7), (3.2.9) und der Sobolevungleichung in den Dimensionen $m \in \{1,2,3\}$ abgeschätzt werden:

$$
\begin{aligned}
I_1 &\le c\int_0^t (\int_M |\partial_t u|^6)^{\frac{1}{3}} (\int_M |Du|^6)^{\frac{1}{3}} (\int_M |\Delta u|^3)^{\frac{1}{3}} \\
&\le c\int_0^t (\int_M (|\nabla\partial_t u|^2 + |\partial_t u|^2))(c + c\int_M |\Delta u|^2 + c(\int_M |\nabla\Delta u|^2)^{\frac{1}{3}}) \\
&\le c(\int_0^t (\int_M (|\partial_t u|^2 + |\nabla\partial_t u|^2))^2)^{\frac{1}{2}} (\int_0^t (c + c(\int_M |\nabla\Delta u|^2)^{\frac{2}{3}}))^{\frac{1}{2}} \\
&\le c(\sup_{0\le t'\le t}(\int_M |\partial_t u|^2)(\int_{M_0^t} (|\partial_t u|^2 + |\Delta\partial_t u|^2))^{\frac{1}{2}} (c\delta + c\delta^{\frac{1}{3}} (\int_{M_0^t} |\nabla\Delta u|^2)^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \\
&\le c(\delta^{\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{6}})(\sup_{0\le t'\le t}(\int_M |\partial_t u|^2) + \int_{M_0^t} |\Delta\partial_t u|^2 + c) \\
&\le c(\delta^{\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{6}})(\int_M |\partial_t u|^2|_{t'=t} + \int_{M_0^t} |\Delta\partial_t u|^2 + c)
\end{aligned}
$$

Für δ klein kann der Term $\int_M |\partial_t u|^2|_{t'=t} + \int_{M_s^t} |\Delta\partial_t u|^2$ auf der anderen Seite verschluckt werden.
Mittels Lemma (3.1.7), (3.2.4), (3.2.13) und der Sobolevungleichung in den Dimensionen

$m \in \{1,2,3\}$ schließt man weiter:

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq c\int_0^t (\int_M |\nabla\partial_t u|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_M |\partial_t u|^6)^{\frac{1}{6}} (\int_M |\Delta u|^6)^{\frac{1}{6}} (\int_M |Du|^6)^{\frac{1}{6}} \\
&\leq c\int_0^t (\int_M |\nabla\partial_t u|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_M |\partial_t u|^6)^{\frac{1}{6}} (\int_M |\Delta u|^6)^{\frac{1}{6}} \\
&\leq c\int_0^t (\int_M |\nabla\partial_t u|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_M (|\nabla\partial_t u|^2 + |\partial_t u|^2))^{\frac{1}{2}} (\int_M (|\nabla\Delta u|^2 + |\Delta u|^2))^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c(\int_0^t (\int_M |\nabla\partial_t u|^2)^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} (\int_0^t (\int_M (|\partial_t u|^2 + |\nabla\partial_t u|^2))^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} (\int_0^t (c + \int_M |\nabla\Delta u|^2)^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} \\
&\leq c(\int_0^t (\int_M |\partial_t u|^2)^{\frac{3}{4}} (\int_M |\Delta\partial_t u|^2)^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} (c\int_0^t (\int_M |\partial_t u|^2)^{\frac{3}{2}} \\
&+ c\int_0^t (\int_M |\partial_t u|^2)^{\frac{3}{4}} (\int_M |\Delta\partial_t u|^2)^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} (c\delta + c\int_0^t (\int_M |\Delta u|^2)^{\frac{3}{4}} (\int_M |\Delta^2 u|^2)^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Indem man nun analog zur Abschï£¡tzung von I_1 verfï£¡hrt, erhï£¡lt man weiter:

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq c(\sup_{0\leq t'\leq t} \int_M |\partial_t u|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_0^t (\int_M |\Delta\partial_t u|^2)^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} \\
&\cdot\ (c\int_0^t (\int_M |\partial_t u|^2)^{\frac{3}{4}} + c\int_0^t (\int_M |\Delta\partial_t u|^2)^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} \\
&\cdot\ (c\delta + c\int_0^t (\int_M |\Delta^2 u|^2)^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} \\
&\leq c(\sup_{0\leq t'\leq t} \int_M |\partial_t u|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_{M_0^t} |\Delta\partial_t u|^2)^{\frac{1}{4}} \delta^{\frac{1}{12}} \\
&\cdot\ (c\delta^{\frac{1}{4}} + c\delta^{\frac{1}{4}} (\int_{M_0^t} |\Delta\partial_t u|^2)^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} \\
&\cdot\ (c\delta + c\delta^{\frac{1}{4}} (\int_{M_0^t} |\Delta^2 u|^2)^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} \\
&\leq c\delta^{\frac{1}{4}} (\sup_{0\leq t'\leq t} \int_M |\partial_t u|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_{M_0^t} |\Delta\partial_t u|^2)^{\frac{1}{4}} (c + c\delta^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} \\
&+ c\delta^{\frac{1}{4}} (\sup_{0\leq t'\leq t} \int_M |\partial_t u|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_{M_0^t} |\Delta\partial_t u|^2)^{\frac{1}{2}} (c + c\delta^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} \\
&\leq c(\delta^{\frac{1}{4}} \sup_{0\leq t'\leq t} \int_M |\partial_t u|^2 + (\delta^{\frac{1}{4}} + \delta^{\frac{1}{2}}) \int_{M_0^t} |\Delta\partial_t u|^2)(c + c\delta^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Nun wird wie bei I_1, fï£¡r δ klein, ein Teil der rechten Seite in der linken verschluckt. Mit Lemma (3.1.7) und (3.2.4) folgt:

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \epsilon \int_{M_0^t} |\partial_t\Delta u|^2 + c\int_0^t (\int_M |\partial_t u|^6)^{\frac{1}{3}} (\int_M |Du|^6)^{\frac{2}{3}} \\
&\leq \epsilon \int_{M_0^t} |\partial_t\Delta u|^2 + c(\int_{M_0^t} (|\nabla\partial_t u|^2 + |\partial_t u|^2)) \\
&\leq 2\epsilon \int_{M_0^t} |\partial_t\Delta u|^2 + \epsilon \int_{M_0^t} |\Delta\partial_t u|^2 + c
\end{aligned}$$

Weiter wird berechnet:

$$\begin{aligned}
\int_{M_0^t} |\partial_t \Delta u|^2 &\leq \int_{M_0^t} < \Delta \partial_t u, \partial_t \Delta u > \\
&+ \int_{M_0^t} < R^N(\partial_t u, Du)Du, \partial_t \Delta u > \\
&\leq \int_{M_0^t} |\Delta \partial_t u|^2 + \epsilon \int_{M_0^t} |\partial_t \Delta u|^2 \\
&+ c\int_{M_0^t} |\partial_t u|^2 |Du|^4 + c\int_{M_0^t} < R^N(\partial_t u, Du)Du, \Delta \partial_t u > \\
&\leq c\int_{M_0^t} |\Delta \partial_t u|^2 + \epsilon \int_{M_0^t} |\partial_t \Delta u|^2 \\
&+ c\int_{M_0^t} |\partial_t u|^2 |Du|^4 \\
&\leq c\int_{M_0^t} |\Delta \partial_t u|^2 + c\epsilon \int_{M_0^t} |\partial_t \Delta u|^2 \\
&+ c\int_0^t (\int_M |Du|^6)^{\frac{2}{3}} (\int_M |\partial_t u|^6)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq c\int_{M_0^t} |\Delta \partial_t u|^2 + c\epsilon \int_{M_0^t} |\partial_t \Delta u|^2 \\
&+ \int_0^t \int_M (\partial_t u|^2 + |\nabla \partial_t u|^2) \\
&\leq c\int_{M_0^t} |\Delta \partial_t u|^2 + c\epsilon \int_{M_0^t} |\partial_t \Delta u|^2 + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq c\int_0^t (\int_M |\partial_t u|^6)^{\frac{1}{3}} (\int_M |Du|^6)^{\frac{1}{6}} (\int_M |\nabla \Delta u|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c\int_0^t (\int_M (|\nabla \partial_t u|^2 + |\partial_t u|^2))(\int_M |\nabla \Delta u|^2))^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c\int_0^t (\int_M (|\nabla \partial_t u|^2 + |\partial_t u|^2))((\int_M |\Delta u|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_M |\Delta^2 u|^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c\int_0^t (\int_M (|\nabla \partial_t u|^2 + |\partial_t u|^2))(\int_M |\Delta^2 u|^2)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

Der weitere Beweisgang vollzieht sich analog zur Argumentation bei der Abschätzung von I_1. I_5 hat dieselbe Struktur wie I_2, kann also genauso abgeschätzt werden.

$$\begin{aligned}
I_6 &\leq \epsilon \int_{M_0^t} |\Delta \partial_t u|^2 + c\int_{M_0^t} |\partial_t u|^2 |Du|^4 \\
&\leq c\epsilon \int_{M_0^t} |\Delta \partial_t u|^2 + c
\end{aligned}$$

Indem man nun alles zusammenfaßt, erhält man die Behauptung.

□

Bemerkung 3.2.19. *Diese Abschätzungen sind translationsinvariant, d.h. es existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $t, s \in [0, T)$ mit $s < t$ und $|t - s| < \delta$ gilt:*

$$\sup_{s \leq t' \leq t} \int_M |\partial_t u(\cdot, t')|^2 \leq c \int_M |\partial_t u(\cdot, s)|^2 + c.$$

Nun kann eine Abschätzung an $\int_M |\Delta^2 u(\cdot, t')|^2$ im Intervall $[t - \frac{\delta}{4}, t]$ bewiesen werden:

Lemma 3.2.20. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0, T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{1, 2, 3\}$, dann existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $0 < t - \frac{\delta}{4} \leq t' \leq t$ mit $t \in [\frac{\delta}{2}, T)$ gilt:*

$$\int_M |\Delta^2 u(\cdot, t')|^2 \leq c.$$

Beweis:
Aus der Differentialgleichung folgt:

$$|\Delta^2 u(\cdot, t')| \leq |\partial_t u(\cdot, t')| + c|Du(\cdot, t')|^2 |\Delta u(\cdot, t')|$$

Nun hat man mit Lemma (3.1.7), (3.2.4) und der Sobolevungleichung aus Lemma (3.2.7):

$$\begin{aligned}
\int_M |Du(\cdot, t')|^4 |\Delta u(\cdot, t')|^2 &\leq c(\int_M |Du(\cdot, t')|^6)^{\frac{2}{3}} (\int_M |\Delta u(\cdot, t')|^6)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq c \int_M (|\Delta u(\cdot, t')|^2 + |\nabla \Delta u(\cdot, t')|^2) \\
&\leq c + \epsilon \int_M |\Delta^2 u(\cdot, t')|^2
\end{aligned}$$

Ohne Einschrï£¡nkung sei $\int_M |\partial_t u(\cdot, s)|^2 = \inf_{t-\frac{\delta}{2} \leq s' \leq t - \frac{\delta}{4}} \int_M |\partial_t u(\cdot, s')|^2$. Aus Bemerkung (3.2.19) erhält man:

$$\begin{aligned}
\sup_{t-\frac{\delta}{4} \leq t' \leq t} \int_M |\partial_t u(\cdot, t')|^2 &\leq c \int_M |\partial_t u(\cdot, s)|^2 + c \\
&= c \inf_{t-\frac{\delta}{2} \leq s' \leq t-\frac{\delta}{4}} \int_M |\partial_t u(\cdot, s')|^2 + c \\
&\leq \frac{c}{\delta} \int_{t-\frac{\delta}{2}}^{t-\frac{\delta}{4}} \int_M |\partial_t u|^2 + c \\
&\leq c
\end{aligned}$$

Dazu wurde Lemma (3.1.7) und die Eigenschaft, daß man das Infimum durch den Mittelwert abschätzen kann, verwendet.
Daraus folgt die Behauptung.

□

Man erhält damit und mit Lemma (3.2.14) eine Abschätzung für $\int_M |\nabla^3 Du(\cdot, t')|^2$.

Lemma 3.2.21. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0, T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{1, 2, 3\}$, dann existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $0 < t - \frac{\delta}{4} \leq t' \leq t$ mit $t \in [\frac{\delta}{2}, T)$ gilt:*

$$\int_M |\nabla^3 Du(\cdot, t')|^2 \leq c.$$

□

Das Ergebnis wird mit Hilfe von Lemma (3.2.16) auf $\int_M |D^4 u(\cdot, t')|^2$ übertragen.

Lemma 3.2.22. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{1,2,3\}$, dann existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $0 < t - \frac{\delta}{4} \leq t' \leq t$ mit $t \in [\frac{\delta}{2}, T)$ gilt:*

$$\int_M |D^4 u(\cdot, t')|^2 \leq c.$$

□

Zusammengefaßt erhält man den folgenden wichtigen Satz.

Satz 3.2.23. *Sei $u \in C^\infty(M \times [0,T), N)$ eine Lösung des biharmonischen Wärmeflusses und sei $m \in \{1,2,3\}$, dann existiert ein $\delta > 0$, so daß die Höldernormen von u und allen Ableitungen von u gleichmäßig auf $[t - \frac{\delta}{4}, t]$ mit $t \in [\frac{\delta}{2}, T)$ durch Konstanten abgeschätzt sind, welche nur von der Ableitungsordnung, $E_1(u_0)$, $E_2(u_0)$, M und N abhängen.*

Beweis:

Aus Lemma (3.2.22) erhält man:

$u(\cdot, t')$ ist beschränkt in $W^{4,2}(M, \mathbb{R}^k)$ $\forall\ t' \in [t - \frac{\delta}{4}, t]$

Für $m \in \{1,2,3\}$ erhält man damit aus dem Sobolevschen Einbettungssatz (siehe z.B. [Alt99]):

$Du(\cdot, t')$ ist beschränkt in $L^\infty(M, \mathbb{R}^k)$ $\forall\ t' \in [t - \frac{\delta}{4}, t]$,

$D^2 u(\cdot, t')$ ist beschränkt in $L^q(M, \mathbb{R}^k)$ $\forall\ t' \in [t - \frac{\delta}{4}, t]$ $\forall\ q < \infty$,

$u(\cdot, t')$ ist beschränkt in $C^{2,\alpha}(M, \mathbb{R}^k)$ $\forall\ t' \in [t - \frac{\delta}{4}, t]$ $\forall \alpha < \frac{1}{2}$

Daraus folgt, daß die rechte Seite der Gleichung (d.h. der Term welcher aus dem Krümmungsterm nach dem Einbetten von N in $\mathbb{R}^k$ entsteht) in $L^q(M \times [t - \frac{\delta}{4}, t], \mathbb{R}^k)$ beschränkt ist fï£¡r alle $q < \infty$. Nun kann die lineare parabolische L^p-Theorie angewandt werden und man erhï£¡lt Hï£¡lderabschï£¡tzungen fï£¡r u und die ersten Ableitungen von u (siehe auch [Str85] fï£¡r den harmonischen Wï£¡rmefluss). Danach kann die klassische Schaudertheorie angewandt werden, um die Höldernormen der höheren Ableitungen abzuschätzen.

□

3.3 Langzeitexistenz und Subkonvergenz

Mit den im letzten Kapitel bewiesenen a-priori-Abschätzungen kann die Langzeitexistenz des Flusses in den Fällen $m \in \{1,2,3\}$ bewiesen werden. Dazu wird benötigt, daß der Fluß für reguläre Anfangswerte eine kurze Zeit lang existiert, was man als Konsequenz der Ergebnisse aus Kapitel 2 erhält.

Satz 3.3.1. *Sei $u_0 \in C^\infty(M,N)$, dann gilt:*
Es existiert ein $T' > 0$, so daß eine Lösung $u \in C^\infty(M \times [0,T'),N)$ des biharmonischen Wärmeflusses mit Anfangswert u_0 existiert.

Beweis:
Indem N isometrisch eingebettet in $\mathbb{R}^k$ aufgefaßt wird, ist der biharmonische Wärmefluß ein parabolisches Differentialgleichungssystem mit elliptischem Hauptteil Δ_g^2, wobei Δ_g den Laplace-Beltrami Operator von (M,g) bezeichnt, so daß Satz (2.4.5) angewendet werden kann. □

Damit ist man beim Hauptresultat des dritten Kapitels angelangt.

Satz 3.3.2. *Seien (M^m,g) und (N^n,h) glatte, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit $\partial M = \emptyset$, R^M, R^N und A bis zur zweiten Ableitung beschränkt, $u_0 \in C^\infty(M^m,N^n)$ und $m \in \{1,2,3\}$, dann gilt:*
Es existiert eine Lösung $u \in C^\infty(M \times [0,\infty),N)$ des biharmonischen Wärmeflusses mit Anfangswerten u_0, wobei im Fall $m \in \{2,3\}$ und $\kappa_N \not\leq 0$ zusätzlich gefordert werden muß, daß $||Du(\cdot,t)||_{L^4} \leq c \ \forall \ t \in (0,\infty)$.
Desweiteren gilt unter den obigen Voraussetzungen:
Für $t_m \to \infty$ geeignet, konvergiert die Folge $u(\cdot,t_m)$ in C^k für alle $k \geq 0$ gegen eine glatte biharmonische Abbildung $u_\infty : M \to N$.
Im Fall $\kappa_N \leq 0$ erhält man außerdem:

u_∞ ist harmonisch.

Beweis:

1. Langzeitexistenz:

Satz (3.3.1) garantiert die Existenz einer Lösung für ein kurzes Zeitintervall. Unter der Annahme, daß eine maximale Existenzzeit $T < \infty$ existiert, würde man eine Lösung $u \in C^\infty(M \times [0,T),N)$ erhalten, welche nicht glatt nach T fortgesetzt werden könnte. Indem man nun allerdings den biharmonischen Wï£¡rmefluss fï£¡r $t \geq T - \epsilon$ mit Anfangswert $u(\cdot, T-\epsilon) \in C^\infty(M,N)$ und $\epsilon > 0$ geeignet betrachtet, erhï£¡lt man aus Satz (3.3.1), dass man den Fluss glatt ï£¡ber T hinaus fortsetzen kann. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalitï£¡t von T. Damit existiert der Fluss fï£¡r alle $t \in \mathbb{R}$.

2. Konvergenz:

Aus Lemma (3.2.17) folgt:

$$\int_t^{t+1} \int_M |D^4 u|^2 dv_g dt \leq c$$

mit $c = c(E_1(u_0), E_2(u_0), M, N)$, d.h. es existiert eine Folge $t_m \to \infty$ mit

$$\int_M |D^4 u(t_m)|^2 dv_g \leq c$$

Aus Lemma (3.1.7) folgt:

$$\int_t^{t+1} \int_M |\partial_t u|^2 dv_g dt \to 0$$

Also gilt:

$$u_m := u(t_m) \rightharpoonup u_\infty$$

schwach in $W^{4,2}(M, \mathbb{R}^k)$, während

$$\partial_t u_m \to 0$$

in $L^2(M, \mathbb{R}^k)$.
Aus dem Rellichschen Einbettungssatz (siehe [Alt99]) folgt:

$$u_m \to u_\infty$$

stark in $W^{2,p}(M, \mathbb{R}^k)$ für alle $p < \infty$ und stark in $W^{1,\infty}(M, \mathbb{R}^k)$.
Aus Satz (3.2.23) folgt, daß für alle m und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$||u_m||_{C^k} \leq c$$

Damit folgt nach Wahl einer Teilfolge (o.E. wiederum (t_m)) aus dem Satz von Arzelá-Ascoli (siehe z.B. [Alt99]):

$$u_m \to u_\infty \quad \text{in} \quad C^{k-1}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.
Indem nun in der Differentialgleichung zum Grenzwert übergegangen wird, erhält man, daß u_∞ eine glatte biharmonische Abbildung ist.

3. Der Fall $\kappa_N \leq 0$:
Im Fall $\kappa_N \leq 0$ folgt aus Satz (3.1.6):

u_∞ ist harmonisch

□

Literaturverzeichnis

[ADN59] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 12:623–727, 1959.

[ADN64] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 17:35–92, 1964.

[Agm65] S. Agmon. *Lectures on elliptic boundary value problems.* D. van Nostrand Company, Princeton, N.J. etc., 1965.

[Alt99] H.W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung.* Springer Lehrbuch. Springer Verlag, Berlin, 3 edition, 1999.

[Aub98] T. Aubin. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry.* Springer Monographs in Mathematics. Springer Verlag, Berlin, 1998.

[CDY92] K.C. Chang, W.Y. Ding, and R. Ye. Finite-time blow up of the heat flow of harmonic maps from surfaces. *J. Differential Geom.*, 36:507–515, 1992.

[CMO01] R. Caddeo, S. Montaldo, and C. Oniciuc. Biharmonic submanifolds of S^3. *Internat. J. Math.*, 12:867–876, 2001.

[CMO02] R. Caddeo, S. Montaldo, and C. Oniciuc. Biharmonic submanifolds in spheres. *Israel J. Math.*, 130:109–123, 2002.

[CWY99] S.-Y. A. Chang, L. Wang, and P.C. Yang. A regularity theory of biharmonic maps. *Comm. Pure Appl. Math.*, 52:1113–1137, 1999.

[DKS02] G. Dziuk, E. Kuwert, and R. Schätzle. Evolution of elastic curves in $\mathbb{R}^n$: Existence and Computation. *SIAM J. Math. Anal.*, 33:1228–1245, 2002.

[Ejd69] S.D. Ejdel'man. *Parabolic systems.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam etc., 1969.

[Ejd94] S.D. Ejdel'man. Parabolic equations. In Yu.V. Egerov and M.A. Shubin, editors, *Partial differential equations VI*, number 63 in Encyclopaedia of Mathematical Sciences, pages 203–316, 1994.

[EL78] J. Eells and L. Lemaire. A Report on harmonic maps. *Bull. London Math. Soc.*, 10:1–68, 1978.

[EL83] J. Eells and L. Lemaire. *Selected topics in harmonic maps*, volume 50 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence , RI, 1983.

[EL88] J. Eells and L. Lemaire. Another Report on harmonic maps. *Bull. London Math. Soc.*, 20:385–524, 1988.

[ES64] J. Eells and J.H. Sampson. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 86:109–160, 1964.

[Eva98] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[EW76] J. Eells and J.C. Wood. Restrictions on harmonic maps of surfaces. *Topology*, 15:263–266, 1976.

[Fri64] A. Friedman. *Partial differential equations of parabolic type.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[Fri69] A. Friedman. *Partial differential equations.* Holt, Rinehart and Winston, New York etc., 1969.

[GKM75] D. Gromoll, W. Klingenberg, and W. Meyer. *Riemannsche Geometrie im Großen*, volume 55 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2 edition, 1975.

[GT01] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Classics in Mathematics. Springer Verlag, Berlin, 2 edition, 2001.

[Ham75] R.S. Hamilton. *Harmonic maps of manifolds with boundary*, volume 471 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[Ham82] R.S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 17:255–306, 1982.

[Har67] P. Hartman. On homotopic harmonic maps. *Canad. J. Math.*, 19:673–687, 1967.

[Jia86a] G. Jiang. 2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds. *Chin. Ann. Math. Ser. A*, 7:130–144, 1986.

[Jia86b] G. Jiang. 2-harmonic maps and their first and second variation formulas. *Chin. Ann. Math. Ser. A*, 7:389–402, 1986.

[Jos83] J. Jost. *Harmonic mappings between Riemannian manifolds*, volume 4 of *Proceedings of the Center for Mathematical Analysis.* Center for Mathematical Analysis, Australian National University, Canberra, 1983.

[Kry96] N.V. Krylov. *Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces.* Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[KS01] E. Kuwert and R. Schätzle. The Willmore flow with small initial energy. *J. Differential Geom.*, 57:409–441, 2001.

[KS02] E. Kuwert and R. Schätzle. Gradient flow for the Willmore functional. *Comm. Anal. Geom.*, 10:307–339, 2002.

[Kuw98] E. Kuwert. Theorie partieller Differentialgleichungen I, 1998. Vorlesung am Mathematischen Institut der Universität Freiburg, WS 1998/99.

[Kuw99] E. Kuwert. Theorie partieller Differentialgleichungen II, 1999. Vorlesung am Mathematischen Institut der Universität Freiburg, SS 1999.

[Mor66] C.B. Morrey. *Multiple integrals in the calculus of variations.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Verlag, Berlin, 1966.

[Mou00] L. Mou. Existence of biharmonic curves and symmetric biharmonic maps. In *Differential equations and computational simulations*, pages 284–291, Chengdu 1999, 2000.

[Nir55] L. Nirenberg. Remarks on strongly elliptic partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 8:649–675, 1955.

[Oni] C. Oniciuc. Biharmonic maps between Riemannian manifolds. Preprint.

[Ott85] S.K. Ottarsson. Closed geodesics on Riemannian manifolds via the heat flow. *J. Geom. Phys.*, 2:49–72, 1985.

[Pol96] A. Polden. *Curves and Surfaces of Least Total Curvature and Fourth-Order Flows.* PhD thesis, Universität Tübingen, 1996.

[Råd92] J. Råde. On the Yang-Mills heat equation in two and three dimensions. *J. reine angew. Math.*, 431:123–163, 1992.

[Sim97] L. Simon. Schauder estimates by scaling. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 5:391–407, 1997.

[Str85] M. Struwe. On the evolution of harmonic mappings of Riemannian surfaces. *Comm. Math. Helv.*, 60:558–581, 1985.

[Str88] M. Struwe. The evolution of harmonic maps in higher dimensions. *J. Differential Geom.*, 28:485–502, 1988.

[Str94] M. Struwe. The Yang-Mills flow in four dimensions. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 2:123–150, 1994.

[Str00] M. Struwe. *Variational Methods*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3.Folge.* Springer Verlag, Berlin, 3 edition, 2000.

[SU81] J. Sacks and K. Uhlenbeck. The existence of minimal immersions of 2-spheres. *Annals of Math.*, 113:1–24, 1981.

[SY97] R. Schoen and S.-T. Yau. *Lectures on harmonic maps.* Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology. International Press, Cambridge, MA, 1997.

[Top96] P.M. Topping. *The Harmonic Map Heat Flow from Surfaces.* PhD thesis, University of Warwick, 1996.

[Wil93] T.J. Willmore. *Riemannian geometry.* Oxford Science Publications. Clarendon Press, Oxford, 1993.

[Wlo82] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen.* Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1982.

[Xin96] Y. Xin. *Geometry of harmonic maps*, volume 23 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications.* Birkhäuser, Boston, 1996.