Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Prof. Dr. Tobias Lamm

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Sommersemester 2013

Inhaltsverzeichnis

I Untermannigfaltigkeiten

Lineare Algebra: $V \subset \mathbb{R}^n$ ist ein m-dimensionaler Unterraum, falls eine der folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

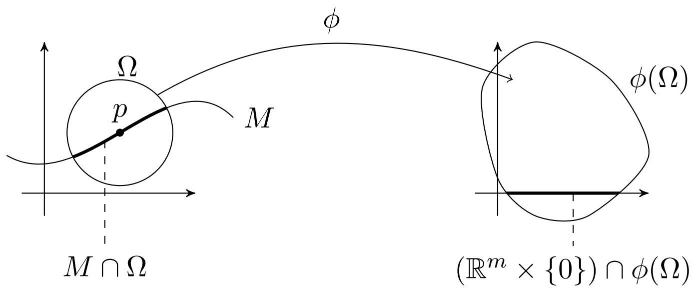
1. $\exists$ Isomorphismus $\phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass $\phi(V) = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.
2. $\exists$ lineare Abbildung $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ mit vollem Rang ($= n - m$), so dass $V = f^{-1}(0)$.
3. $\exists$ lineare Abbildung $\psi \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{Rang} \psi = m$ und $V = \psi(\mathbb{R}^m)$.

Definition I.1 Sei $1 \leq m \leq n$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine m-dimensionale ***Untermannigfaltigkeit*** des $\mathbb{R}^n$ der Klasse $C^r, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls gilt:

$\forall p \in M \; \exists \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von p und $\exists \phi \colon \Omega \to \phi(\Omega)$ C^r-Diffeomorphismus mit

$$\phi(M \cap \Omega) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \phi(\Omega).$$

Die Abbildung ϕ heißt ***lokale Plättung*** von M.

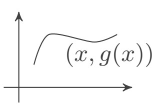


Satz I.1 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $m + k = n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) M ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^r.

2) Zu jedem $p \in M$ existiert eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$, so dass $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ und $\operatorname{Rang} Df = k$ auf Ω.

3) Zu jedem $p \in M$ existieren offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^k$ und eine Funktion $g \in C^r(U, V)$, so dass nach geeigneter Permutation der Koordinaten gilt:



$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

4) Zu jedem $p \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^m$ und eine Abbildung $\varphi \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(x_0) = p$ für ein $x_0 \in U$ und $\operatorname{Rang} \mathrm{D}\varphi(x) = m \; \forall x \in U$, sodass φ offene Teilmengen von U in relativ offene Teilmengen von M abbildet. (Lokale Parametrisierung, φ heißt Karte)

Beispiel 0) Offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

1) Affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$.

2) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = 1\}$ ist n-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$.

(i) Definiere $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, f(x) := \|x\|^2 - 1$. Dann ist

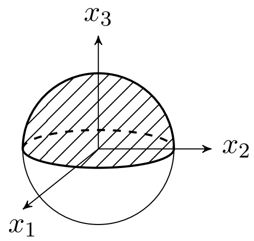
$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0\}, \nabla f(x) = 2x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}.$$

$\implies$ $\operatorname{Rang} \mathrm{D}f(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

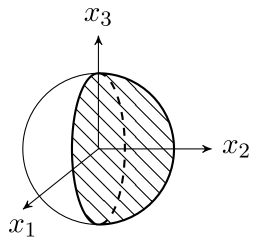
(ii) Das Teilstück (a) lässt sich als Graph darstellen:

$$\big(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\big),\ (x_1, x_2) \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^2.$$

Das Teilstück (b) lässt sich jedoch nicht ohne Permutation der Koordinaten als Graph schreiben.



(a)



(b)

3) $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$, $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^TA = \mathbb{1}\}$ ist eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$. Es ist

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : f(A) = 0\}$$

mit $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$, $f(A) := A^TA - \mathbb{1}$. Der Raum $\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ ist ein $\frac{n(n+1)}{2}$-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$, f ist C^∞ und es gilt für die Richtungsableitung in Richtung H:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}f(A)H &:= \lim_{t\to 0} \frac{f(A+tH) - f(A)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(A+tH)^T(A+tH) - A^TA}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \big(H^TA + A^TH + tH^TH\big) \\
&= H^TA + A^TH.
\end{aligned}$$

Behauptung: $\mathrm{D}f(A)$ ist surjektiv für alle $A \in O(n)$. Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ und wähle $H := \frac{1}{2}AB$, dann gilt:

$$\mathrm{D}f(A)H = \frac{1}{2}\big((AB)^TA + A^TAB\big) = \frac{1}{2}(B^T + B) = B.$$

$\implies$ $\operatorname{Rang} Df(A) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis (von Satz I.1) (1) $\implies$ (2): $\forall p \in M\ \exists$ lokale Plättung $\phi\colon \Omega \to \phi(\Omega)$ der Klasse C^r mit $p \in \Omega$. Sei $\pi^\perp\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die zweite Komponente. Definiere $f := \pi^\perp \circ \phi$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$.

Für $q \in \Omega$ gilt:

$$f(q) = 0 \iff \phi(q) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \iff q \in \phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = M \cap \Omega.$$

Außerdem gilt $\operatorname{Rang} \mathrm{D}f = \operatorname{Rang}(\pi^\perp \circ \mathrm{D}\phi) = k$ wegen $\operatorname{Rang} \mathrm{D}\phi = n$, denn ϕ ist ein Diffeomorphismus und es ist $\operatorname{Rang} \pi^\perp = k$.

(2) $\implies$ (3): k der Vektoren $\partial_1 f(p), \dots, \partial_n f(p)$ sind linear unabhängig. Ohne Einschränkung seien dies $\partial_{m+1} f(p), \dots, \partial_n f(p)$.

$\implies$ Für $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ ist $D_y f(p)$ invertierbar.

$\implies$ Die Behauptung folgt aus dem Satz über implizite Funktionen.

(3) $\implies$ (4): Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ und definiere

$$\varphi\colon U \to M \cap \Omega,\ x \mapsto (x, g(x)).$$

Es ist $\operatorname{Rang} \mathrm{D}\varphi(x) = m$ für alle $x \in U$. Sein nun $\tilde{U} \subset U$ offen und V wie in (3). Dann ist $\varphi(\tilde{U}) = M \cap (\tilde{U} \times V)$ relativ offen in M.

(4) $\implies$ (1): Ohne Einschränkung sei $x_0 = 0$, $\varphi(0) = p$ und die ersten m Zeilen von $\mathrm{D}\varphi(x)$ seien linear unabhängig. Definiere

$$\varphi' := (\varphi_1, \dots, \varphi_m)\colon U \to \mathbb{R}^m.$$

$\mathrm{D}\varphi'(x)$ ist invertierbar, d.h. es gibt eine Umgebung $U' \subset \mathbb{R}^m$ von 0 und $V' \subset \mathbb{R}^m$, so dass $\varphi'\colon U' \to V'$ ein C^r-Diffeomorphismus ist (Satz von der lokalen Umkehrbarkeit). Definiere

$$\psi\colon U' \times \mathbb{R}^k \to V' \times \mathbb{R}^k,\ \psi(\xi, \eta) := \varphi(\xi) + (0, \eta).$$

Die Abbildung ψ ist bijektiv, denn es ist

$$\psi(\xi, \eta) = \psi(\xi', \eta') \implies \varphi'(\xi) = \varphi'(\xi') \xRightarrow{\varphi' \text{ injektiv}} \xi = \xi' \implies \eta = \eta'.$$

Sei $(\xi', \eta') \in V' \times \mathbb{R}^k$. Wir setzen $\xi := (\varphi')^{-1}(\xi') \in U'$, dann ist $\psi(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + (0, \eta) = (\xi', \eta')$ mit $(0, \eta) = (0, \eta') + \big((\varphi'(\xi), 0) - \varphi(\xi)\big)$. Weiter ist

$$\mathrm{D}\psi(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \mathrm{D}\varphi'(\xi) & 0 \\ * & \mathbb{1}_{\mathbb{R}^k} \end{pmatrix}$$

invertierbar, also ist ψ ein C^r-Diffeomorphismus auf das Bild von ψ.

Da φ offene Teilmengen von U in relativ offene Teilmengen von M abbildet, ist $\varphi(U') \subset M$ relativ offen, d.h. $\exists \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\varphi(U') = \tilde{V} \cap M$. Setze $\hat{V} := (V' \times \mathbb{R}^k) \cap \tilde{V}$ und $\hat{U} := \psi^{-1}(\hat{V})$, dann ist $\psi^{-1}\colon \hat{V} \to \hat{U}$ ein C^r-Diffeomorphismus mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}
\psi(\hat{U} \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) &= \psi(\hat{U} \cap (U' \times \mathbb{R}^k) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})) && (\hat{U} \subset \psi^{-1}(V' \times \mathbb{R}^k) = U' \times \mathbb{R}^k) \\
&= \psi(\hat{U} \cap (U' \times \{0\})) \\
&= \psi(\hat{U}) \cap \psi(U' \times \{0\}) && (\psi \text{ ist bijektiv}) \\
&= \hat{V} \cap \varphi(U') \\
&= \hat{V} \cap (\tilde{V} \cap M) \\
&= \hat{V} \cap M.
\end{aligned}$$

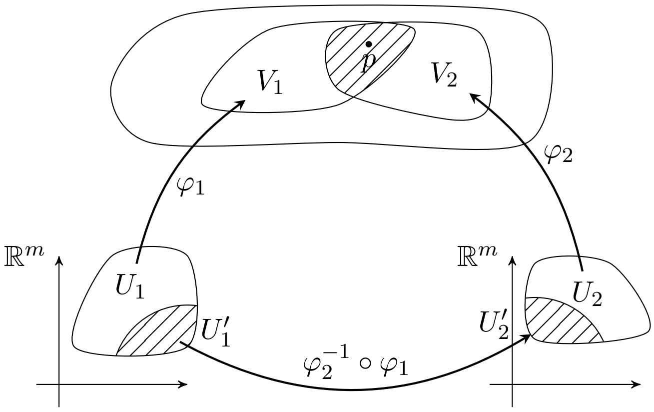
$\implies \hat{U} \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) = \psi^{-1}(\hat{V} \cap M)$. □

Bemerkung Eine Abbildung $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $m \leq n$, heißt ***Immersion***, falls $\operatorname{Rang} \mathrm{D}\varphi(x) = m$ für alle $x \in U$ gilt. φ nennt man dann auch eine ***Karte***.

Eine Familie von Karten $\varphi_j\colon U_j \to \varphi_j(U_j)$ heißt ***Atlas*** einer m-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M, falls $M \subset \bigcup_j \varphi_j(U_j)$.

Frage: Hängen Eigenschaften von M von der Wahl der Karten ab? Betrachte zu zwei Karten $\varphi_1 \colon U_1 \to V_1$ und $\varphi_2 \colon U_2 \to V_2$ den ***Kartenwechsel***

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \underbrace{\varphi_1^{-1}(V_1 \cap V_2)}_{=:U_1'} \to \underbrace{\varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)}_{=:U_2'} .$$



Satz I.2 *φ_1, φ_2 seien wie oben, M sei eine m-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Dann sind U_1', U_2' offen in $\mathbb{R}^m$ und $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ ist ein C^r-Diffeomorphismus.*

Beweis φ_1, φ_2 Homöomorphismus $\implies$ V_1, V_2 offen $\implies$ $V_1 \cap V_2$ offen $\implies$ U_1', U_2' offen. Weiter ist $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \colon U_1' \to U_2'$ bijektiv. Zu zeigen bleibt $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1, (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)^{-1} \in C^r$:

Sei $p \in V_1 \cap V_2$. Nach Definition I.1 existiert ein $V \subset V_1 \cap V_2$, ein $W \in \mathbb{R}^n$ mit $p \in V$ und ein C^r-Diffeomorphismus $\phi \colon V \to W$, so dass

$$\phi(M \cap V) = W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

$W_j := \varphi_j^{-1}(M \cap V) \in \mathbb{R}^m$ offen. $\phi \circ \varphi_j \colon W_j \to W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \implies \phi \circ \varphi_j = (\psi_j, 0)$ mit $\psi_j \colon W_j \to \mathbb{R}^m$.

$\operatorname{Rang} \mathrm{D}\phi = n,\ \operatorname{Rang} \mathrm{D}\varphi_j = m \implies \operatorname{Rang} \mathrm{D}\psi_j = m$. Nach dem Satz der inversen Funktion folgt: ψ_j ist C^r-Diffeomorphismus. Nun gilt

$$\begin{aligned} \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \quad &= (\phi \circ \varphi_2)^{-1} \circ (\phi \circ \varphi_1) = \psi_2^{-1} \circ \psi_1 \in C^r \\ (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)^{-1} &= \psi_1^{-1} \circ \psi_2 \in C^r. \end{aligned}$$

□

II Tangential- und Normalraum

Sei stets $r \geq 1$.

Definition II.1 $M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine m-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt ***Tangentialvektor*** an M in p, wenn ein $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ in C^1 existiert mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Die Menge $T_pM := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ ist Tangentialvektor}\}$ heißt ***Tangentialraum***.

Satz II.1 *$M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine C^r-Untermannigfaltigkeit, $p \in M$.*

i) T_pM ist m-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

ii) Ist $\varphi\colon U \to V$ eine Karte von M mit $p \in V$ und $a := \varphi^{-1}(p) \in U$, dann gilt $T_pM = \operatorname{Bild} \mathrm{D}\varphi(a)$.

$\implies \partial_1\varphi(a), \ldots, \partial_m\varphi(a)$ *bilden eine Basis von T_pM.*

iii) Ist $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ Umgebung von p, $f \in C^1(\tilde{V}, \mathbb{R}^{n-m})$ mit $\operatorname{Rang} Df(p) = n - m$, so dass

$$M \cap \tilde{V} = \{x \in \tilde{V} : f(x) = 0\},$$

dann ist $T_pM = \operatorname{Kern} Df(p)$.

Beweis Wir zeigen, dass $\operatorname{Bild} \mathrm{D}\varphi(a) \subset T_pM \subset \operatorname{Kern} Df(p)$ gilt. Aus

$$\dim \operatorname{Bild} \mathrm{D}\varphi(a) = m = n - \operatorname{Rang} Df(p) = \dim \operatorname{Kern} Df(p)$$

folgt dann $\operatorname{Bild} \mathrm{D}\varphi(a) = \operatorname{Kern} Df(p) = T_pM$.

i) Sei $v \in \operatorname{Bild} \mathrm{D}\varphi(a)$, $v = \mathrm{D}\varphi(a)w$ mit $w \in \mathbb{R}^m$. Für ε klein genug ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma(t) := \varphi(a + tw)$ stetig differenzierbar[1]. Es gilt $\gamma(0) = \varphi(a) = p$ und $\gamma'(0) = \mathrm{D}\varphi(a)w = v \implies v \in T_pM$.

ii) Sei $v \in T_pM$ und sei γ wie in Definition II.1. Für $|t|$ klein ist $\gamma(t) \in \tilde{V}$, also gilt

$$\gamma(t) \in M \cap \tilde{V} \implies f(\gamma(t)) = 0 \implies 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Big(f(\gamma(t))\Big) = \mathrm{D}f(p)v.$$

$\implies v \in \operatorname{Kern} Df(p)$

□

Beispiel $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : f(A) = 0\}$, $f(A) := A^TA - \mathbb{1}$.

$$\implies \mathrm{D}f(A)H = A^TH + H^TA \xRightarrow{\text{Satz II.1 iii)}} T_{\mathbb{1}}O(n) = \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} : H^T = -H\} =: \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{anti}}.$$

Für $A \in O(n)$ beliebig gilt:

$$\begin{aligned} T_AO(n) &= \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} : (A^TH)^T = -A^TH\} \\ &= \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^TH \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{anti}}\} \\ &= A \cdot \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{anti}}. \end{aligned}$$

[1] weil U offen ist und φ stetig differenzierbar.

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0\}$, wobei $f(x) := \|x\|^2 - 1$. Dann ist $\nabla f(x) = 2x \implies Df(x) = 2x^T$. Der Tangentialraum ist $T_pS^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0\}$.

Definition II.2 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann heißt $N_pM := \big(T_pM\big)^\perp$ der ***Normalraum*** an M in p.

Satz II.2 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit, $p \in M$. Ist $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in \tilde{V}$, $f \in C^1(\tilde{V}, \mathbb{R}^n)$ mit* $\operatorname{Rang} Df(p) = n - m$, *so dass*

$$M \cap \tilde{V} = \{x \in \tilde{V} : f(x) = 0\},$$

so bilden $\nabla f_1(p), \ldots, \nabla f_{n-m}(p)$ eine Basis von N_pM.

Beweis Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v \in T_pM$, dann gilt für ε klein genug, $f(\gamma(t)) = 0$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und damit folgt für alle $1 \leq j \leq n - m$

$$0 = \frac{d}{dt} f_j(\gamma(t))|_{t=0} = \langle \nabla f_j(p), v\rangle,$$

also $\nabla f_j(p) \in (T_pM)^\perp = N_pM$. Aus Satz II.1 folgt

$$\dim N_pM = n - \dim T_pM = n - m$$

und da $\operatorname{Rang} Df(p) = n - m$ schliessen wir

$$N_pM = \operatorname{span}\{\nabla f_1(p), \ldots, \nabla f_{n-m}(p)\}.$$

$\square$

Beispiel Es ist $N_{\mathbb{1}}O(n) = \big(\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{anti}}\big)^\perp = \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$.

III Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, $U \subset \mathbb{R}^m$ und $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ eine Immersion. Nach Satz II.1 bilden $\partial_1\varphi(x), \dots, \partial_m\varphi(x)$ eine Basis von T_pM, $p = \varphi(x)$.

Induzierte Metrik: $g(x) := (\mathrm{D}\varphi(x))^T \mathrm{D}\varphi(x)$.

Es ist $g_{ij}(x) = \langle \partial_i\varphi(x), \partial_j\varphi(x)\rangle$, g ist symmetrisch und $\langle g(x)v, v\rangle = \|\mathrm{D}\varphi(x)v\|^2$.

$\implies$ $\operatorname{Kern} g(x) = \operatorname{Kern} \mathrm{D}\varphi(x) = \{0\}$, da φ Immersion ist.

$\implies$ g ist (strikt) positiv definit.

Definition III.1 Sei $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ eine Immersion mit induzierter Metrik g und $B \subset U$ sei $\mathcal{L}^m$-messbar. Der ***m-dimensionale Flächeninhalt*** von φ auf B ist

$$A_B(\varphi) := \int_B \mathcal{J}\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

mit $\mathcal{J}\varphi(x) := \sqrt{\det g(x)}$ (***Jacobische***).

Beispiel 1) $S\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear (siehe Übungsblatt 2).

2) $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$, $I = (a, b)$ (***reguläre Kurve***).

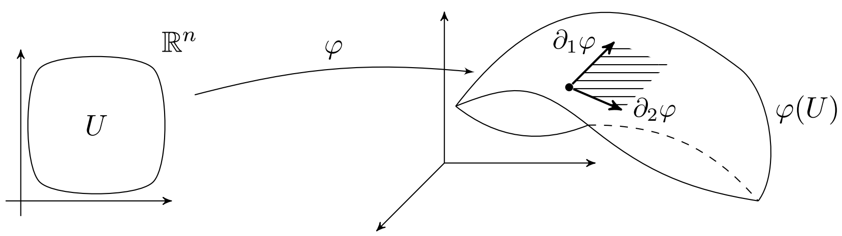
$g(t) = \langle \varphi'(t), \varphi'(t)\rangle = \|\varphi'(t)\|^2 \implies \mathcal{J}\varphi(x) = \|\varphi'(t)\|$. Die ***Bogenlänge*** der Kurve ist

$$L(\varphi) = \int_a^b \big\|\varphi'(t)\big\|\,\mathrm{d}t.$$

3) $U \subset \mathbb{R}^2$, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$, $\varphi = \varphi(x, y)$ (***reguläre Fläche***).

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2 & \langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\rangle \\ \langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\rangle & \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathcal{J}\varphi = \sqrt{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2 \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2 - \langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\rangle^2} = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\|$$



Ist zum Beispiel $U := (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ mit sphärischen Koordinaten

$$\varphi(\theta, \phi) := \big(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta\big),$$

so ist $\mathcal{J}\varphi(\theta, \phi) = \sin\theta \implies A_U(\varphi) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = 4\pi$.

4) $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n),\ U \subset \mathbb{R}^n,\ A_E = \mathrm{Vol}_E$.

$$\varphi \text{ Immersion} \iff \det \mathrm{D}\varphi \neq 0 \iff \varphi \text{ lokaler Diffeomorphismus.}$$

$\mathcal{J}\varphi = |\det \mathrm{D}\varphi|$. Ist $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ injektiv, dann ist

$$\mathrm{Vol}_E(\varphi) = \int_E |\det \mathrm{D}\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \overset{\substack{\text{Transform-}\\ \text{ationssatz}}}{=} \mathcal{L}^n(\varphi(E)).$$

Im Allgemeinen muss man die Vielfachheit der Bildpunkte zählen, zum Beispiel hier:

$$\gamma\colon [0,1] \to [0,1],\ \gamma(t) := \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 2 - 2t, & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

5) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$, $u \in C^1(U, \mathbb{R}^k),\ k + m = n$ und $\varphi(x) := (x, u(x))$.

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \langle \partial_i \varphi(x), \partial_j \varphi(x) \rangle \\ &= \langle (e_i, \partial_i u(x)), (e_j, \partial_j u(x)) \rangle \\ &= \delta_{ij} + \langle \partial_i u(x), \partial_j u(x) \rangle. \end{aligned}$$

$$\implies (\mathrm{D}\varphi)^T \mathrm{D}\varphi = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} + (\mathrm{D}u)^T(\mathrm{D}u) \implies A_U(\varphi) = \int_U \sqrt{\det(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} + (\mathrm{D}u(x))^T \mathrm{D}u(x))}\,\mathrm{d}x$$

Falls $k = 1$ ist, gilt weiter: Zu $x \in U$ existiert eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_m$ mit $\mathrm{D}u(x)v_1 = \|\mathrm{D}u(x)\|$, $\mathrm{D}u(x)v_j = 0$ für $j \geq 2$.

(denn für $\mathrm{D}u(x) = 0$ ist die Aussage trivial und für $\mathrm{D}u(x) \neq 0$ setze $v_1 := \frac{\mathrm{D}u(x)}{\|\mathrm{D}u(x)\|}$ und ergänze diesen Vektor zu einer Orthonormalbasis mit Gram-Schmidt.)

$$\begin{aligned} \big\langle \big(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} + (\mathrm{D}u(x))^T \mathrm{D}u(x)\big) v_i, v_j \big\rangle &= \delta_{ij} + (\mathrm{D}u(x)v_i)(\mathrm{D}u(x)v_j) \\ &= \begin{cases} 1 + \|\mathrm{D}u(x)\|^2, & \text{falls } i = j = 1 \\ \delta_{ij}, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Eigenwerte $1 + \|\mathrm{D}u(x)\|^2$ einmal, 1 $(m-1)$-mal $\implies A_U(\varphi) = \int_U \sqrt{1 + \|\mathrm{D}u(x)\|^2}\,\mathrm{d}x$.

Satz III.1 *Sei $\phi \in C^1(U, \tilde{U})$ ein Diffeomorphismus, $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ und $\varphi \in C^1(\tilde{U}, \mathbb{R}^n)$ eine Immersion. Dann gilt*

$$A_{\phi(B)}(\varphi) = A_B(\varphi \circ \phi) \ \ \forall B \subset U\ \mathcal{L}^m\text{-messbar.}$$

Beweis Sei g die induzierte Metrik von $\varphi \circ \phi$ und h die induzierte Metrik von φ. Es gilt:

$$g(x) = \big(\mathrm{D}(\varphi \circ \phi)(x)\big)^T \big(\mathrm{D}(\varphi \circ \phi)(x)\big) = \big(\mathrm{D}\phi(x)\big)^T \underbrace{\big[\mathrm{D}\varphi(\phi(x))\big]^T \mathrm{D}\varphi(\phi(x))}_{=h(\phi(x))} \mathrm{D}\phi(x).$$

$$\implies g(x) = (\mathrm{D}\phi(x))^T h(\phi(x)) \mathrm{D}\phi(x).$$

$$\implies \mathcal{J}(\varphi \circ \phi)(x) = \sqrt{\det g(x)} = \sqrt{\det h(\phi(x))} \cdot |\det \mathrm{D}\phi(x)|$$

$$\begin{aligned} \implies A_B(\varphi \circ \phi) = \int_B \mathcal{J}(\varphi \circ \phi)(x)\,\mathrm{d}x \quad &= \quad \int_B \mathcal{J}\varphi(\phi(x))\,|\det \mathrm{D}\phi(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\substack{\text{Transform-}\\ \text{ationssatz}}}{=} \int_{\phi(B)} \mathcal{J}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \quad A_{\phi(B)}(\varphi). \end{aligned}$$

□

Lemma III.1 *Jede m-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist als abzählbare Vereinigung $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ von kompakten Mengen K_i darstellbar.*

Beweis Siehe [8, Kapitel 11]. □

Lemma III.2 *Für jede C^1-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es lokale C^1-**Parametrisierungen** (injektive Immersionen) $f_i\colon U_i \to M$, $U_i \subset \mathbb{R}^m$, mit $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(U_i)$.*

Beweis Für jedes $p \in M$ existiert eine lokale Plättung $\phi\colon W \to \phi(W)$, $p \in W$, $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $U = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \phi(W)$ offen in $\mathbb{R}^m$, d.h. $U = \phi(M \cap W)$.

$\implies f = \phi^{-1}|_{(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \phi(W)}$ ist lokale Parametrisierung von M und $f(U) = M \cap W$ ist offen in M.

Also wird jedes kompakte $K \subset M$ durch endliche viele Bildgebiete überdeckt. Die Behauptung folgt aus Lemma III.1. □

Satz III.2 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit. $B \subset M$ heißt **messbar**, falls gilt:*

$$\varphi^{-1}(B) \text{ ist } \mathcal{L}^m\text{-messbar für alle lokalen Parametrisierungen } \varphi\colon U \to M.$$

Das System $\mathcal{M}$ aller messbaren Teilmengen von M ist eine $\sigma-$Algebra und enthält alle Borelmengen. Auf $\mathcal{M}$ existiert genau ein Maß μ_M, so dass für jede lokale Parametrisierung $\varphi\colon U \to M$ und jede messbare Menge $B \subset \varphi(U)$ gilt:

$$\mu_M(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \mathcal{J}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis 1) $\mathcal{M}$ ist σ-Algebra:

- $\emptyset \in \mathcal{M}$
- $B \in \mathcal{M} \implies M \setminus B \in \mathcal{M}$, denn ist $\varphi\colon U \to M$ eine lokale Parametrisierung, dann ist $\varphi^{-1}(M \setminus B) = U \setminus \varphi^{-1}(B)$ messbar, da $\varphi^{-1}(B)$ messbar ist.
- $B_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{M}$, denn $\varphi^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi^{-1}(B_i)$.

2) Sei $V \subset M$ offen, $\varphi\colon U \to M$ eine lokale Parametrisierung. Dann ist $\varphi^{-1}(V)$ offen in $\mathbb{R}^m$, also $\mathcal{L}^m$-messbar $\implies V \in \mathcal{M}$.

3) Zeige, dass $\mu_{\mathcal{M}}$ ein Maß ist: Sei $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ disjunkt mit $M_i \subset V_i$ und $\varphi_i\colon U_i \to V_i := \varphi(U_i)$ lokale Parametrisierung (nach Lemma III.2 mit $M_i := V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$).

(i) Ist μ_M Maß, dann ist für $B \subset M$:

$$\mu_M(B) = \mu_M\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B \cap M_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_M(B \cap M_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\varphi_i^{-1}(B \cap M_i)} \mathcal{J}\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x \qquad (*)$$

$\implies \mu_M$ ist eindeutig.

(ii) Durch $(*)$ wird ein Maß definiert: Ist $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, B_j messbar und paarweise disjunkt, dann gilt

$$\mu_M(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\varphi_i^{-1}(B \cap M_i)} \mathcal{J}\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_{\varphi_i^{-1}(B_j \cap M_i)} \mathcal{J}\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_M(B_j).$$

$\Longrightarrow$ μ_M ist ein Maß.

Ist $\varphi\colon U \to V = \varphi(U)$ eine lokale Parametrisierung, $B \subset V$ messbar, so ist

$$\phi_i = \varphi_i^{-1} \circ \varphi\colon\ \varphi^{-1}(V \cap V_i) \to \varphi_i^{-1}(V \cap V_i)$$

nach Satz I.2 ein C^1-Diffeomorphismus. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\mu_M(B) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\varphi_i^{-1}(B\cap M_i)} \mathcal{J}\varphi_i(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\phi_i(\varphi^{-1}(B\cap M_i))} \mathcal{J}\varphi_i(y)\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Satz III.1}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\varphi^{-1}(B\cap M_i)} \mathcal{J}\big((\varphi_i \circ \phi_i)(x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\varphi^{-1}(B\cap M_i)} \mathcal{J}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi^{-1}(B)} \mathcal{J}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

Lemma III.3 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$, $M_i \subset V_i$ paarweise disjunkt, $\varphi_i\colon U_i \to V_i = \varphi_i(U_i)$ lokale Parametrisierungen. Für eine messbare Funktion[1] $u\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt dann*

$$\int_M u\,\mathrm{d}\mu_M = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\varphi_i^{-1}(M_i)} u(\varphi_i(x))\mathcal{J}\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x,$$

*falls $u \geq 0$ oder u μ_M-**integrierbar** (d.h. $\int u^+\,\mathrm{d}\mu_M + \int u^-\,\mathrm{d}\mu_M < \infty$ für $u = u^+ - u^-$) ist.*

Beweis (i) Ist u eine charakteristische Funktion, so folgt die Behauptung aus Satz III.2.

(ii) Die Aussage gilt für messbare Treppenfunktionen.

(iii) a) Ist $u \geq 0$, dann approximiere u von unten durch Treppenfunktionen und benutze den Satz von der monotonen Konvergenz ($u_i \to u,\ u_i \leq u_{i+1} \implies \lim \int u_i\,\mathrm{d}\mu = \int u\,\mathrm{d}\mu$).

b) Ist u μ_M-messbar, dann wende a) auf u^+, u^- an.

□

Lemma III.4 *Sei $\lambda > 0, Q \in O(n), a \in \mathbb{R}^n$ und* [2]

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ T(p) := \lambda Q(a + p).$$

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit, so ist $N := T(M)$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit der selben Dimension m und für μ_M, μ_N gilt:

1) $A \subset M$ messbar $\iff$ $T(A) \subset N$ messbar und weiter gilt $\mu_N(T(A)) = \lambda^m \mu_M(A)$.

[1] Das heißt $u^{-1}(U) \in \mathcal{M}, u^{-1}(\pm\infty) \in \mathcal{M}\ \forall U \subset \mathbb{R}$ offen.

[2] Solche Abbildungen nennt man Ähnlichkeitsabbildungen.

2) Ist $u\colon N \to \overline{\mathbb{R}}$ μ_N*-messbar, so ist* $u \circ T\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ μ_M*-messbar und falls entweder* $u \geq 0$ *oder* u μ_M*-integrierbar ist, so gilt*

$$\int_N u(q)\,\mathrm{d}\mu_N(q) = \lambda^m \int_M u(T(p))\,\mathrm{d}\mu_M(p).$$

Beweis Zu $q \in N$ wähle lokale Plättung $\phi\colon W \to \phi(W)$ von M mit $T^{-1}(q) \in W$.

$\implies$ $\phi \circ T^{-1}\colon T(W) \to \phi(W)$ ist lokale Plättung von N mit $q \in T(W)$.

$\implies$ N ist C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension m.

Beachte, dass gilt:

$$\phi\colon U \to M \text{ lokale Parametrisierung} \iff T \circ \varphi\colon U \to N \text{ lokale Parametrisierung.}$$

Wegen $(T \circ \varphi)^{-1}(T(A)) = \varphi^{-1}(A)$ ist

$$A \text{ messbar} \iff T(A) \text{ messbar.}$$

1) Ohne Einschränkung sei $A \subset \varphi(U)$, $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ eine lokale Parametrisierung (sonst betrachte eine disjunkte Zerlegung wie in $(*)$). Es gilt $\mathrm{D}T(x) = \lambda Q$ und damit

$$\mathrm{D}(T\circ\varphi)(x)^T \mathrm{D}(T\circ\varphi)(x) = \mathrm{D}\varphi(x)^T \underbrace{\mathrm{D}T(\varphi(x))^T \mathrm{D}T(\varphi(x))}_{=\lambda^2} \mathrm{D}\varphi(x) = \lambda^2 \mathrm{D}\varphi(x)^T \mathrm{D}\varphi(x)$$

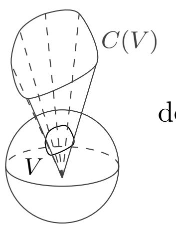
$$\xRightarrow{\text{Satz III.2}} \mu_N(T(A)) = \int_{(T\circ\varphi)^{-1}(T(A))} \mathcal{J}(T\circ\varphi)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(A)} \lambda^m \mathcal{J}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lambda^m \mu_M(A).$$

2) $u = \chi_B \rightsquigarrow$ richtig für Treppenfunktionen $\rightsquigarrow$ richtig für $u \geq 0$ bzw. u μ_N-messbar. □

Satz III.3 *Für* $u \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$ *ist* $u|_{\partial B_r} \in L^1(\mu_{\partial B_r})$ *für fast alle* $r > 0$*, mit* $\partial B_r := \partial B_r(0)$*, und es gilt:*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} u(p)\,\mathrm{d}x(p) &= \int_0^\infty \int_{\partial B_r} u(p)\,\mathrm{d}\mu_{\partial B_r}(p)\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^\infty r^n \int_{S^n} u(rw)\,\mathrm{d}\mu_{S^n}(w)\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Beweis Sei $f\colon U \to V \subset S^n$ eine lokale Parametrisierung und sei



Kegel

$$C(V) := \{rw : w \in V, r > 0\}$$

der Kegel über V. Betrachte den Diffeomorphismus

$$\phi\colon (0,\infty) \times U \to C(V),\ \phi(r,x) := rf(x).$$

$g_{ij}(x) = \langle \partial_i f(x), \partial_j f(x)\rangle \implies g(x) = Df(x)^T Df(x).$

$$\big(\mathrm{D}\phi(r,x)\big)^T \mathrm{D}\phi(r,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 g(x)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}, \text{ wegen } \mathrm{D}\phi(r,x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & \\ \vdots & rDf(x) \\ f_{n+1}(x) & \end{pmatrix}$$

und aus $|f|^2 = 1$ folgt durch Ableiten $\langle \partial_k f, f \rangle = 0$. Ist $B = f(A)$ für $\mathcal{L}^n$-messbares $A \subset U$ und $C(B)$ wie oben, so folgt

$$\begin{aligned}
\int_{C(B)} u(p)\,\mathrm{d}x(p) &\overset{\substack{\text{Transform-}\\\text{ationssatz}}}{=} \int_{(0,\infty)\times A} u(rf(q))r^n\sqrt{\det g(q)}\,\mathrm{d}x(r,q)\\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty r^n\Big(\int_A u(rf(q))\sqrt{\det g(q)}\,\mathrm{d}x(q)\Big)\,\mathrm{d}r\\
&\overset{\text{Lemma III.3}}{=} \int_0^\infty r^n\Big(\int_B u(rw)\,\mathrm{d}\mu_{S^n}(w)\Big)\,\mathrm{d}r\\
&\overset{\text{Lemma III.4}}{=} \int_0^\infty \int_{\{rw\,:\,w\in B\}} u(p)\,\mathrm{d}\mu_{\partial B_r}(p)\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Wähle nun disjunkte Zerlegung $S^n = \bigcup_{j=1}^N B_j$ mit $B_j \subset V_j$, $f_j\colon U_j \to V_j$ lokale Parametrisierung (beachte, dass S^n kompakt ist) und addiere die entsprechenden Integrale. $\square$

IV Orientierung

Erinnerung: Zwei Basen $e_1, \dots, e_m$ und $e'_1, \dots, e'_m$ des $\mathbb{R}^n$ heißen gleich-orientiert, wenn die Matrix A mit $Ae_i = e'_i$ positive Determinante hat.

Definition IV.1 M m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.[1]

i) Zwei Karten $\varphi_1 \colon U_1 \to V_1$, $\varphi_2 \colon U_2 \to V_2$ heißen ***gleich-orientiert***, falls für $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ die Abbildung
$$\phi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \colon \ \varphi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$
die Bedingung $\det \mathrm{D}\phi > 0$ erfüllt. (ϕ heißt ***orientierungstreu***)

ii) M heißt ***orientierbar***, wenn M einen Atlas $\mathcal{A}$ aus gleich-orientierten Karten besitzt. Ein solcher Altas $\mathcal{A}$ heißt ***orientiert***.

Bemerkung Jede Untermannigfaltigkeit die durch eine Karte parametrisiert werden kann ist orientierbar (zum Beispiel alle offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$).

Die Wahl eines orientierten Atlas legt die Orientierung fest:

Sei $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ die Menge aller Karten, die gleich-orientiert zu allen Karten in $\mathcal{A}$ sind. Dann ist $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ selbst orientiert, denn sind $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, $\varphi_i \colon U_i \to V_i$, $p \in V_1 \cap V_2$, dann gibt es ein $\phi \in \mathcal{A}$ mit
$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \underbrace{(\varphi_2^{-1} \circ \phi)}_{=f} \circ \underbrace{(\phi^{-1} \circ \varphi_1)}_{=g}$$
in einer Umgebung von $\varphi_1^{-1}(p)$ und f, g sind orientierungstreu. $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ ist der maximale $\mathcal{A}$-enthaltende orientierte Atlas.

Definition IV.2 Eine ***Orientierung*** auf einer orientierbaren Untermannigfaltigkeit ist ein maximal orientierter Atlas.

Bemerkung Eine Orientierung auf M induziert eine Orientierung auf T_pM, siehe Übung.

Satz IV.1 *Eine **Hyperfläche** $M \subset \mathbb{R}^n$ (d.h. eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit) ist genau dann orientierbar, wenn eine stetige Abbildung $\nu \colon M \to \mathbb{R}^n$ mit $|\nu(p)| = 1$, $\nu(p) \in N_pM$ $\forall p \in M$ existiert (ν heißt **stetiges Einheitsnormalenfeld**).*

Beispiel S^{n-1} ist orientierbar, $\nu(p) := p$.

Beweis „$\Longrightarrow$“: Sei $\mathcal{A}$ ein orientierter Atlas, $\varphi \colon U \to V$, $\varphi \in \mathcal{A}$, $p \in V$. Wähle $\nu(p)$ mit
$$|\nu(p)| = 1, \ \nu(p) \in N_pM \ \text{und} \ \det(\nu(p), \partial_1\varphi(a), \dots, \partial_{n-1}\varphi(a)) > 0,$$
wobei $a = \varphi^{-1}(p)$. Dazu muss das Vorzeichen von $\nu(p)$ entsprechend gewählt werden.

[1]Wir setzen hier immer C^1 voraus.

Wohldefiniertheit: Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}$, $\varphi_i \colon U_i \to V_i$, $p \in V_1 \cap V_2$, $a_i := \varphi_i^{-1}(p)$ und $\phi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$. Dann gilt $\mathrm{D}\varphi_1(a_1) = \mathrm{D}\varphi_2(\underbrace{\phi(a_1)}_{=a_2})\mathrm{D}\phi(a_1)$. Wir zeigen jetzt $\nu_1(p) = \nu_2(p)$:

$$\begin{aligned}\det\big(\nu_2(p), \mathrm{D}\varphi_1(a_1)\big) &= \det\big(\nu_2(p), \mathrm{D}\varphi_2(a_2)\mathrm{D}\phi(a_1))\big) \\ &= \det\left(\big(\nu_2(p), \mathrm{D}\varphi_2(a_2)\big)\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & \mathrm{D}\phi(a_1)\end{pmatrix}\right) \\ &= \underbrace{\det\big(\nu_2(p), \mathrm{D}\varphi_2(a_2)\big)}_{>0} \cdot \underbrace{\det\big(\mathrm{D}\phi(a_1)\big)}_{>0} > 0\end{aligned}$$

Zeige, dass ν stetig ist: Für $p \in M$ und Umgebung V von p wähle eine C^1-Funktion $f \colon V \to \mathbb{R}$, so dass

$$M \cap V = f^{-1}(0).$$

Nach Satz II.2 ist $\nu' = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ stetiges Einheitsnormalenfeld[2]. Ersetze gegebenenfalls f durch $-f$, dann folgt

$$\det\big(\nu'(p), \partial_1\varphi(\varphi^{-1}(p)), \ldots, \partial_{n-1}\varphi(\varphi^{-1}(p))\big) > 0,$$

also $\nu(p) = \nu'(p)$. Aus der Stetigkeit folgt, dass gilt

$$\det\big(\nu'(q), \partial_1\varphi(\varphi^{-1}(q)), \ldots, \partial_{n-1}\varphi(\varphi^{-1}(q))\big) > 0$$

für alle q nahe bei $p \implies \nu' = \nu$ nahe bei $p \implies \nu$ stetig nahe p.

„$\Longleftarrow$“: Sei ν ein stetiges Einheitsnormalenfeld. Zu $p \in M$ wähle eine Karte $\varphi \colon U \to V$ mit $p \in \varphi(U) \subset V$. Ohne Einschränkung sei

$$\det\big(\nu(p), \partial_1\varphi(\varphi^{-1}(p)), \ldots, \partial_{n-1}\varphi(\varphi^{-1}(p)\big) > 0,$$

sonst ersetzte φ durch $\varphi \circ P$ mit

$$P \colon U \to U,\ P(x_1, \ldots, x_{n-1}) := (-x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Durch Verkleinern von U gilt

$$\det\big(\nu(\varphi(x)), \partial_1\varphi(x), \ldots, \partial_{n-1}\varphi(x)\big) > 0$$

für alle $x \in U$. Wir zeigen jetzt, dass alle Karten gleich-orientiert sind: Ist $\phi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ ein Kartenwechsel, dann gilt für $x \in \varphi_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$, dass $\phi(x) \in \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$.

$$\begin{aligned}0 < {} & \det(\nu(\varphi_1(x)), \mathrm{D}\varphi_1(x)) \\ = {} & \det(\nu(\varphi_2(x)), \mathrm{D}\varphi_2(\phi(x))\mathrm{D}\phi(x)) \\ = {} & \det\left(\Big[\nu(\varphi_2(x)), \mathrm{D}\varphi_2(\phi(x))\Big]\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & \mathrm{D}\phi(x)\end{pmatrix}\right) \\ = {} & \det \mathrm{D}\phi(x) \cdot \underbrace{\det\big(\nu(\varphi_2(\phi(x))), \mathrm{D}\varphi_2(\phi(x))\big)}_{>0}.\end{aligned}$$

$\square$

[2] ν ist stetig, denn es ist $f \in C^1$ und wegen $\operatorname{Rang} f' = n$ verschwindet f' nicht.

Definition IV.3 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche mit stetigem Einheitsnormalenfeld ν. Die durch die Bedingung

$$\det\big(\nu(p), \partial_1\varphi(\varphi^{-1}(p)), \ldots, \partial_{n-1}\varphi(\varphi^{-1}(p))\big) > 0$$

für Karten φ um $p \in M$ eines orientierten Atlas festgelegte Orientierung heißt die durch ν ***induzierte Orientierung***.

Beispiel 1) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und c ein ***regulärer Wert*** von f, d.h. für alle $x \in f^{-1}(c)$ sei $\nabla f(x) \neq 0$. Dann ist $M = f^{-1}(c)$ eine orientierte Hyperfläche, denn

$$\nu(p) := \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$$

ist stetiges Einheitsnormalenfeld.

2) Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Hyperfläche mit orientiertem Atlas $\mathcal{A}$, dann ist

$$\nu(p) := \frac{(\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi)(\varphi^{-1}(p))}{|(\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi)(\varphi^{-1}(p))|}$$

ein stetiges Einheitsnormalenfeld für Karten φ um $p \in M$.[3]

[3] Für linear unabhängige Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt $\det(a \times b, a, b) = |a \times b|^2 > 0$.

V Teilmengen mit glattem Rand

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $\Omega \subset M$. Der ***Rand*** von Ω ist $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \mathring{\Omega}$ (bezüglich der von M induzierten Topologie).

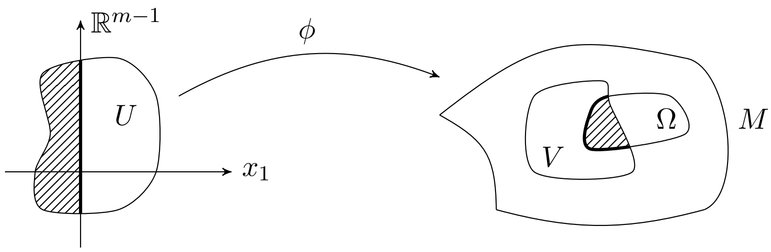
Definition V.1 Sei M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset M$. Man sagt, Ω ***hat glatten Rand***, falls für alle $p \in \partial\Omega$ eine Karte $\phi\colon U \to V$ in C^∞ mit $p \in V$ existiert für die

$$\phi(U \cap \{x_1 \leq 0\}) = \Omega \cap V$$

und

$$\phi(U \cap \{x_1 = 0\}) = \partial\Omega \cap V$$

gilt, wobei $\{x_1 \leq 0\} := \{x \in \mathbb{R}^m : x_1 \leq 0\}$. Eine Karte mit diesen Eigenschaften heißt ***Rand-adaptiert***.



Lemma V.1 *Sei M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset M$ eine Teilmenge mit glattem Rand. Dann gibt es einen Atlas aus Rand-adaptierten Karten. Ist M orientiert und $m \geq 2$, so gibt es sogar einen orientierten Atlas aus Rand-adaptierten Karten, der die gegebene Orientierung induziert.*

Beweis Für alle $p \in \partial\Omega$ existiert eine Rand-adaptierte Karte. Ist $p \notin \partial\Omega$, so kann man immer eine Karte $\phi\colon U \to V$ wählen, so dass entweder $U \subset \{x_1 < 0\}$ und $p \in \Omega$, oder $U \subset \{x_1 > 0\}$ und $p \in V \subset M \setminus \overline{\Omega}$. Die Menge aller dieser Rang-adaptierten Karten ist ein Atlas $\mathcal{A}$.

Sei nun M durch den Atlas $\mathcal{A}'$ orientiert. Indem wir die Definitionsbereiche von Karten in $\mathcal{A}$ klein genug wählen, dürfen wir annehmen, dass für alle $\phi\colon U \to V$, $\phi \in \mathcal{A}$ ein $\phi' \in \mathcal{A}'$, $\phi'\colon U' \to V'$ mit $V \subset V'$ existiert. Weiter ändert sich das Vorzeichen von $\det \mathrm{D}(\phi'^{-1} \circ \phi)$ auf U nicht.

Ersetze nun alle Karten ϕ aus $\mathcal{A}$ für die dieses Vorzeichen negativ ist durch $\phi \circ P$, wobei

$$P(x_1, \ldots, x_m) := (x_1, \ldots, x_{m-1}, -x_m).$$

So erhält man einen neuen Atlas $\mathcal{A}''$, der wieder Rand-adaptiert ist und die Bedingung $\det \mathrm{D}((\phi')^{-1} \circ \phi) > 0$ für alle $\phi \in \mathcal{A}''$ mit zugehörigem $\phi' \in \mathcal{A}'$ erfüllt.

Seien jetzt $\phi_1\colon U_1 \to V_1$, $\phi_2\colon U_2 \to V_2$, $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{A}''$ und seien $\phi_1'\colon U_1' \to V_1'$, $\phi_2'\colon U_2' \to V_2'$, $\phi_1', \phi_2' \in \mathcal{A}'$ mit $V_1' \supset V_1$, $V_2' \supset V_2$. Dann ist

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1 = \left(\phi_2^{-1} \circ \phi_2'\right) \circ \left((\phi_2')^{-1} \circ \phi_1'\right) \circ \left((\phi_1')^{-1} \circ \phi_1\right)$$

orientierungstreu. Seien $\phi_1\colon U_1 \to V_1 \in \mathcal{A}''$ und $\phi_1'\colon U_1' \to V_1' \in \mathcal{A}'$ mit $V_1' \supset V_1$ sowie $\phi_2\colon U_2 \to V_2 \in \mathcal{A}'$ mit $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

$\implies \phi_2^{-1} \circ \phi_1 = \big(\phi_2^{-1} \circ \phi_1'\big) \circ \big((\phi_1')^{-1} \circ \phi_1\big)$ ist orientierungstreu. Also induzieren $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}''$ dieselbe Orientierung. $\square$

Satz V.1 *M sei eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n, m \geq 1$ und $\Omega \subset M$ habe glatten Rand. Dann ist $\partial\Omega$ eine $(m-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Ist M orientierbar, so auch $\partial\Omega$.*

Beweis Sei $\mathcal{A}$ ein Rand-adaptierter Atlas. Sei $\phi\colon U \to V$ eine Karte aus $\mathcal{A}$ mit $\partial\Omega \cap V \neq \emptyset$. Definiere $\phi'\colon U' \to \partial\Omega \cap V$ durch $U' := \{x' \in \mathbb{R}^{m-1} : (0, x_1', \dots, x_{m-1}') \in U\}$,

$$\phi'(x_1', \dots, x_{m-1}') := \phi(0, x_1', \dots, x_{m-1}').$$

ϕ' ist stetig und bijektiv. Die Umkehrabbildung ist $(\phi')^{-1} = P \circ \phi^{-1}\big|_{\partial\Omega\cap V}$ mit $P(x) = (x_2, \dots, x_m)$. Weiter gilt $\mathrm{D}\phi'(x) = (\partial_2\phi, \partial_3\phi, \dots, \partial_m\phi)$.

$\implies \operatorname{Rang} \mathrm{D}\phi' = m-1 \implies \partial\Omega$ ist $(m-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Sei $\mathcal{A}'$ der Atlas bestehend aus allen Karten ϕ' wie oben. Sei jetzt $m \geq 2$. Nach Lemma V.1 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathcal{A}$ aus gleich-orientierten Rand-adaptierten Karten besteht. Wir zeigen, dass alle Karten $\phi' \in \mathcal{A}'$ gleich-orientiert sind:

Dazu seien $\phi_1\colon U_1 \to V_1,\ \phi_2\colon U_2 \to V_2$ aus $\mathcal{A}$ mit $V_1 \cap V_2 \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ und $\phi_1'\colon U_1' \to \partial\Omega \cap V_1,\ \phi_2'\colon U_2' \to \partial\Omega \cap V_2$ seien die zugehörigen Karten aus $\mathcal{A}'$. Der Kartenwechsel

$$\varphi' = (\phi_2')^{-1} \circ \phi_1' : \phi_1^{-1}(\partial\Omega \cap V_1 \cap V_2) \to \phi_2^{-1}(\partial\Omega \cap V_1 \cap V_2)$$

ist gegeben durch

$$\varphi'(x') = \underbrace{P \circ \phi_2^{-1}}_{=(\phi_2')^{-1}} \circ \underbrace{\phi_1(0, x')}_{=\phi_1'(x')} = \big(\varphi_2(0, x'), \dots, \varphi_m(0, x')\big)$$

für $x' \in \phi_1^{-1}(\partial\Omega \cap V_1 \cap V_2)$, wobei φ der Kartenwechsel

$$\varphi = \phi_2^{-1} \circ \phi_1\colon \phi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to \phi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

ist. Insbesondere ist

$$\mathrm{D}\varphi'(x') = \frac{\partial(\varphi_2, \dots, \varphi_m)}{\partial(x_2, \dots, x_m)}(0, x')$$

die untere $(m-1) \times (m-1)$-Untermatrix von $\mathrm{D}\varphi$. Weiter sind ϕ_1, ϕ_2 Rand-adaptiert, also gilt $\varphi_1(0, x_2, \dots, x_m) = 0$ und $\varphi_1(x_1, \dots, x_m) \leq 0$ für $x_1 \leq 0$.

$$\implies \partial_i\varphi_1(0, x_2, \dots, x_m) \begin{cases} = 0, & \text{für } i \geq 2 \\ \geq 0, & \text{für } i = 1. \end{cases}$$

$$\implies 0 < \det \mathrm{D}\varphi(0, x') = \det \begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1(0, x') & 0 \cdots 0 \\ * & \mathrm{D}\varphi'(x') \end{pmatrix} = \underbrace{\partial_1\varphi_1(0, x')}_{\geq 0} \cdot \det \mathrm{D}\varphi'(x').$$

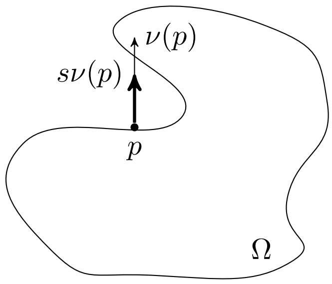
Also $\det \mathrm{D}\varphi'(x') > 0 \implies \partial\Omega$ ist orientierbar. $\square$

Definition V.2 Sei M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n, m \geq 2$ und $\Omega \subset M$ habe glatten Rand. Ist $\mathfrak{O}_0(\mathcal{A})$ eine Orientierung auf M, wobei $\mathcal{A}$ ohne Einschränkung Rand-adaptiert sei, so definiert der im Beweis von Satz V.1 konstruierte Atlas die durch $\mathfrak{O}_0(\mathcal{A})$ ***induzierte Orientierung*** auf $\partial\Omega$.

Satz V.2 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge mit glattem Rand. Dann existiert auf Ω genau ein Einheitsnormalenfeld ν, so dass für alle $p \in \partial\Omega$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit*

$$\begin{aligned} p + s\nu(p) &\notin \Omega \ \ \forall s \in (0,\varepsilon) \quad \textit{und} \\ p - s\nu(p) &\in \Omega \ \ \forall s \in (0,\varepsilon). \end{aligned}$$

Zusätzlich ist ν stetig.



Beweis Sei $\mathcal{A}$ ein Rand-adaptierter Atlas von $\mathbb{R}^n$. Ist $\phi\colon U \to V$ eine Karte aus $\mathcal{A}$ mit $p \in \partial\Omega \cap V$ und Inverser $\psi = \phi^{-1}$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, so ist nach Satz II.2 der 1-dimensionale Normalenraum $N_p\partial\Omega$ durch $\nabla\psi_1$ erzeugt, denn es gilt $\partial\Omega \cap V = \{x \in V : \psi_1(x) = 0\}$.[1]

Setze $\nu(p) := \frac{\nabla\psi_1(p)}{|\nabla\psi_1(p)|} \implies \nu$ ist stetig und es gilt

$$\psi_1(p + s \cdot \nu(p)) = \underbrace{\psi_1(p)}_{=0} + \nabla\psi_1(p)\nu(p)s + o(s) = s\,|\nabla\psi(p)| + o(s) > 0$$

für $s > 0$ klein. Also $p + s\nu(p) \notin \Omega$ für s klein. Analog: $\psi_1(p - s\nu(p)) = -s\,|\nabla\psi_1(p)| + o(s) < 0$ für s klein. $\square$

[1]da ϕ eine Rand-adaptierte Karte ist.

VI Die klassischen Integralsätze

Definition VI.1 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche welche durch das Einheitsnormalenfeld ν orientiert ist und sei $f\colon M \to \mathbb{R}^n$. Das (orientierte) ***Oberflächenintegral*** von f über M ist

$$\int_M f \,\vec{\mathrm{d}}\mu_M := \int_M f \cdot \nu \,\mathrm{d}\mu_M.$$

Definition VI.2 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ sei differenzierbar, dann sind

1) $\operatorname{div} f\colon U \to \mathbb{R}$, $\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i$ (***Divergenz***).

2) Ist $n = 3$, so ist $\operatorname{rot}\colon U \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix} = \nabla \times f$ die ***Rotation*** von f.

Zerlegung der Eins: Sei

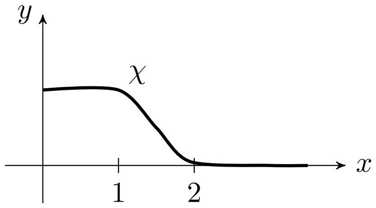
$$\chi''\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \chi''(t) := \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Weiter sei $\chi'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\chi'(t) = \frac{\chi''(4-t)}{\chi''(4-t) + \chi''(t-1)} = \begin{cases} 1, & \text{für } t \le 1 \\ \in (0,1), & \text{für } 1 \le t \le 4 \\ 0, & \text{für } t \ge 4 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Zuletzt sei $\chi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $\chi(x) := \chi'(|x|^2) \quad \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Es ist $\chi \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$ und $\chi \equiv 1$ auf $\overline{B_1(0)}$.

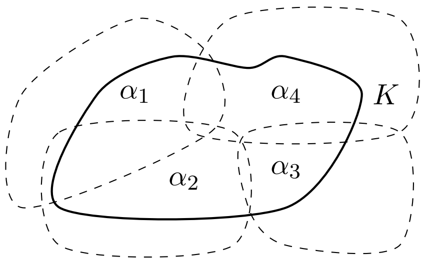


Satz VI.1 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(U_j)_{j=1,\dots,N}$ sei eine offene Überdeckung von K, $K \subset \bigcup_{j=1}^N U_j$. Dann gibt es eine der Überdeckung (U_j)* ***untergeordnete Zerlegung der Eins*** *(α_j), d.h. Funktionen $\alpha_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit*

i) $0 \le \alpha_j \le 1$.

ii) $\sum_{j=1}^N \alpha_j \equiv 1$.

iii) $\operatorname{spt} \alpha_j \subset U_j$.



Beweis Für alle $x \in K$ wählen wir ein $j(x)$ mit $x \in U_{j(x)}$ und eine Kugel $B_{3\varepsilon(x)}(x) \subset U_{j(x)}$. Da K kompakt ist existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_{\tilde{N}} \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{\tilde{N}} B_{\varepsilon(x_i)}(x_i).$$

Jetzt definiere $\beta_i(x) := \chi\big(\frac{x-x_i}{\varepsilon(x_i)}\big)$. Es ist $\beta_i \equiv 1$ auf $\overline{B_{\varepsilon(x_i)}(x_i)}$ und $\beta_i \equiv 0$ in $K \setminus B_{2\varepsilon(x_i)}(x_i)$. Setze jetzt

$$\alpha_i'(x) := \frac{\beta_i(x)}{\sum_k \beta_k(x) + \prod_k (1 - \beta_k(x))}.$$

Der Nenner verschwindet nicht, denn für $\sum_k \beta_k(x) = 0$ ist $\beta_k(x) = 0$ und damit $\prod_k (1 - \beta_k(x)) = 1$. Also ist $\alpha_i' \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Für alle i gilt weiter $\beta_i = 1$ und damit $\prod_k (1 - \beta_k) = 0$ auf $B_{\varepsilon(x_i)}(x_i)$. Damit ist

$$\sum_i \alpha_i' = 1$$

auf $\cup_{i=1}^N B_{\varepsilon(x_i)}(x_i)$. Weiter haben wir spt $\alpha_i' = \overline{B_{2\varepsilon(x_i)}(x_i)} \subset U_{j(x_i)}$ und die Funktionen

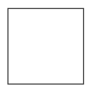
$$\alpha_j := \sum_{i\,:\,j(x_i)=j} \alpha_i'$$

erfüllen dann die Behauptung. □

Satz VI.2 (Gauß) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Omega \subset U$ kompakt mit glattem Rand und äußerem Einheitsnormalenfeld ν. Ist $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, so gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{div} f \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f \cdot \vec{\mathrm{d}}\mu_{\partial\Omega}.$$

Ecken



Bemerkung Man kann in Satz VI.2 die Bedingung glatt durch Lipschitz ersetzen (vgl. [10]).

Lemma VI.1 *Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(V)$ habe kompakten Träger in V. Dann gilt*

$$\int_V \partial_j f \,\mathrm{d}x = 0 \text{ für alle } 1 \le j \le n.$$

Beweis Sei $\tilde{f} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus V \\ f(x), & \text{für } x \in V \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und es folgt

$$\int_V \partial_j f \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j \tilde{f} \,\mathrm{d}x \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{R}} \partial_j \tilde{f}(x) \,\mathrm{d}x_j \Big)}_{=0} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{j-1} \,\mathrm{d}x_{j+1} \cdots \mathrm{d}x_n = 0.$$

□

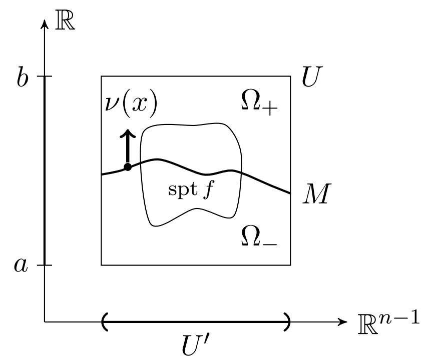
Lemma VI.2 *Sei $U := U' \times (a,b) \subset \mathbb{R}^n$ offen und $h \in C^1(U', (a,b))$, setze*

$$\begin{aligned} \Omega_+ &:= \{x = (x', x_n) \in U : x_n \geq h(x')\}, \\ \Omega_- &:= \{x = (x', x_n) \in U : x_n \leq h(x')\}, \\ M &:= \{x = (x', x_n) \in U : x_n = h(x')\}. \end{aligned}$$

Dann gilt für $f \in C^1(U)$ mit kompaktem Träger in U

$$\int_{\Omega \pm} \partial_j f \,\mathrm{d}x = \mp \int_M f(x) \nu_j(x) \,\mathrm{d}\mu_M \quad (j = 1, \ldots, n),$$

wobei ν durch $\nu(x) = \nu(x', x_n) = \frac{(-\nabla h(x'), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}}$ gegeben sei.



Beweis M ist $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit Parametrisierung

$$\phi \colon U' \to \mathbb{R}^n, \; \phi(x') = (x', h(x'))$$

und es ist $\mathcal{J}\phi = \sqrt{1 + |\nabla h|^2}$.

1. Fall: Ω_-, $1 \leq j \leq n-1$. Definiere $F \colon U \to \mathbb{R}$, $F(x) = F(x', x_n) = \int_a^{x_n} f(x', t) \,\mathrm{d}t$.

$$\Longrightarrow \partial_i F(x) = \begin{cases} \int_a^{x_n} \partial_i f(x', t) \,\mathrm{d}t, & \text{für } 1 \leq i \leq n-1 \\ f(x', x_n) = f(x), & \text{für } i = n. \end{cases}$$

Setze $G(x') := F(x', h(x')) \implies G$ hat kompakten Träger in U'.

$$0 \overset{\text{Lemma VI.1}}{=} \int_{U'} \partial_j G(x') \,\mathrm{d}x' = \int_{U'} \Big(\partial_j F(x', h(x')) + \partial_n F(x', h(x')) \partial_j h(x') \Big) \,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}
\implies \int_{\Omega_-} \partial_j f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{U'} \int_a^{h(x')} \partial_j f(x',t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x' \\
&= \int_{U'} \partial_j F(x', h(x'))\,\mathrm{d}x' \\
&= -\int_{U'} \partial_n F(x', h(x'))\partial_j h(x')\,\mathrm{d}x' \\
&= -\int_{U'} f(x', h(x'))\partial_j h(x')\,\mathrm{d}x' \\
&= \int_{U'} f(x', h(x'))\nu_j(x', h(x'))\sqrt{1+|\nabla h|^2(x')}\,\mathrm{d}x' \\
&= \int_M f(x)\nu_j(x)\,\mathrm{d}\mu_M.
\end{aligned}$$

2. Fall: $\Omega_-,\ j = n$

$$\begin{aligned}
&\int_a^{h(x')} \partial_n f(x',t)\,\mathrm{d}t = f(x', h(x')) \\
\implies \int_{\Omega_-} \partial_n f\,\mathrm{d}x &= \int_{U'} \int_a^{h(x')} \partial_n f(x',t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x' \\
&= \int_{U'} f(x', h(x'))\underbrace{\nu_n(x')\sqrt{1+|\nabla h|^2}}_{=1}\,\mathrm{d}x' \\
&= \int_M f\nu_n\,\mathrm{d}\mu_M.
\end{aligned}$$

3. Fall: Ω_+

$$\int_{\Omega_+} \partial_j f\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_U \partial_j f\,\mathrm{d}x}_{=0} - \int_{\Omega_-} \partial_j f\,\mathrm{d}x.$$

□

Lemma VI.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand. Zu jedem $p \in \partial\Omega$ existiert (nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten) eine offene Menge $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und ein $\psi \in C^1(U', I)$ mit*

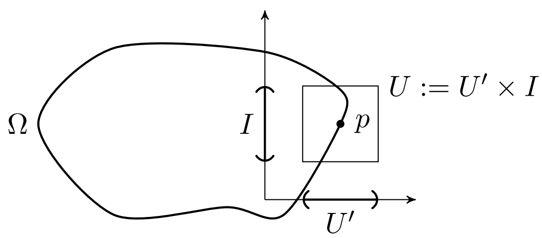
$$\partial\Omega \cap U = \{(x', \psi(x')) : x' \in U'\},\ U := U' \times I.$$

Dabei ist

$$\Omega \cap U = \{x \in U : x_n \leq \psi(x')\}$$

oder

$$\Omega \cap U = \{x \in U : x_n \geq \psi(x')\}.$$



Beweis Sei $p \in \partial\Omega$. Schreibe $\partial\Omega$ lokal um p als Nullstellenmenge von Ψ_1, wobei $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_n) = \phi^{-1}$ die Inverse einer Rand-adaptierten Karte ϕ ist.

Wie im Beweis von Satz I.1 (Schritt „2) $\implies$ 3)“) erhalten wir (nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten) offene Mengen $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $I \in \mathbb{R}$ mit $p \in U := U' \times I$, $\partial_n\Psi_1 > 0$ oder $\partial_n\Psi_1 < 0$ auf U, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $\psi\colon U' \to I$, so dass

$$\partial\Omega \cap (U' \times I) = \{(x', \psi(x')) : x' \in U'\}$$

(Satz von der impliziten Funktion). Je nach Vorzeichen von $\partial_n\Psi_1$ gilt

$$\Omega \cap U = \{x \in U : \Psi_1(x) \le 0\} = \begin{cases} \{x \in U : x_n \le \psi(x')\} \\ \{x \in U : x_n \ge \psi(x')\}. \end{cases}$$

$\square$

Beweis (von Satz VI.2) $\partial\Omega$ ist kompakt, also existiert eine endliche Überdeckung durch Mengen $(U_j)_{1\le j\le N}$ mit U_j wie in Lemma VI.3.

Zu jedem U_j existieren Mengen $U_j' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $I_j = (a_j, b_j) \subset \mathbb{R}$ sowie $\psi_j \in C^1(U_j', I_j)$ mit $U_j = U_j' \times I_j$ und

$$\begin{aligned} \partial\Omega \cap (U_j' \times I_j) &= \{(x', \psi_j(x')) : x' \in U_j'\}, \\ \Omega \cap (U_j' \times I_j) &= \begin{cases} \{x \in U_j : x_n \le \psi_j(x')\} & \text{oder} \\ \{x \in U_j : x_n \ge \psi_j(x')\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Sei ν die äußere Normale an $\partial\Omega$. Dann ist

$$\nu(x) = \frac{(-\nabla\psi_j(x'), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla\psi_j(x')|^2}} \quad \text{bzw.} \quad \nu(x) = \frac{(\nabla\psi_j(x'), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla\psi_j(x')|^2}}$$

auf U_j. Nach Satz VI.1 wählen wir eine $(\mathring{\Omega}, U_1, \dots, U_N)$ untergeordnete, glatte Zerlegung der Eins $(\alpha_j)_{j=0,\dots,N}$.

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div} f \,\mathrm{d}x &= \underbrace{\int_{\mathring{\Omega}} \operatorname{div}(\alpha_0 f)\,\mathrm{d}x}_{=0} + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega\cap U_j} \operatorname{div}(\alpha_j f)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\Omega\cap U_j} \sum_{k=1}^n \partial_k(\alpha_j f_k)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Lemma VI.2}}{=} \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega\cap U_j} \sum_{k=1}^n (\alpha_j f_k)(x)\nu_k(x)\,\mathrm{d}\mu_{\partial\Omega\cap U_j} \\ &= \int_{\partial\Omega} f(x)\cdot\nu(x)\,\mathrm{d}\mu_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

$\square$

Lemma VI.4 (Partielle Integration) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega \subset U$ kompakt mit glattem Rand und $u, v \in C^1(U)$. Dann gilt*

$$\int_\Omega (\partial_j u)v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} uv\cdot\nu_j\,\mathrm{d}\mu_{\partial\Omega} - \int_\Omega u\partial_j v\,\mathrm{d}x$$

für alle $j = 1, \dots, n$.

Äußere Einheitsnormalen von $[a,b]$.

Beweis Definiere für festes $j \in \{1, \dots, n\}$ die Funktion $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ durch

$$f(x) := u(x)v(x)e_j(x).$$

Dann gilt $\operatorname{div} f(x) = \partial_j f_j(x) = \partial_j\big(u(x)v(x)\big)$. □

Lemma VI.5 (Greensche Formel) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega \subset U$ kompakt mit glattem Rand und $u, v \in C^2(U)$. Dann gilt:*

i) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \,\mathrm{d}\mu_{\partial\Omega}$

ii) $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\partial_\nu v \,\mathrm{d}\mu_{\partial\Omega} - \int_\Omega u\Delta v \,\mathrm{d}x$

iii) $\displaystyle\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (u\partial_\nu v - v\partial_\nu u) \,\mathrm{d}\mu_{\partial\Omega}$

wobei $\partial_\nu := \langle \nabla u, \nu \rangle$ (Richtungsableitung)

Beweis i) $f(x) := \nabla u(x)$, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{div} f(x) = \operatorname{div} \nabla u(x) = \Delta u(x)$. Mit dem Satz von Gauß folgt

$$\int_\Omega \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \operatorname{div} f \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \mu_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \mu_{\partial\Omega}.$$

ii) $f(x) := (u\nabla v)(x)$, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\operatorname{div} f = \sum_{j=1}^n \partial_j f_j = \sum_{j=1}^n \partial_j(u\partial_j v) = \sum_{j=1}^n (\partial_j u \partial_j v + u\partial_j^2 v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v.$$

Damit gilt

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \operatorname{div} f \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \,\mathrm{d}\mu_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} u\partial_\nu v \,\mathrm{d}\mu_{\partial\Omega}.$$

iii)

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} u\partial_\nu v - \int_\Omega u\Delta v = \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu u - \int_\Omega v\Delta u.$$

□

VII Multilinearformen

V sei ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Definition VII.1 Eine ***alternierende k-Form*** auf V, $k \in \mathbb{N}$, ist eine Abbildung $\omega : V^k \to \mathbb{R}$, die

i) in jedem Argument linear ist

ii) bei Vertauschung zweier Argumente das Vorzeichen ändert, d.h. für $i \neq j$ gilt

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

Der Vektorraum der k-Formen wird mit $\operatorname{Alt}^k V$ bezeichnet, wobei man noch $\operatorname{Alt}^0 V := \mathbb{R}$ setzt.

Beispiel 1) Die Determinante ist eine n-Form.

2) $\operatorname{Alt}^1 V = V^*$ ist der Dualraum von V.

Bemerkung Wie bei der Determinante sieht man, dass die Bedingung ii) äquivalent ist zu

ii a) $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$ falls $v_i = v_j$ für $i \neq j$.

oder

ii b) $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0 \iff v_1, \ldots, v_k$ sind linear abhängig.

ii c) Ist $\pi \in S_k$, so gilt
$$\omega(v_1, \ldots, v_k) = \operatorname{sgn}(\pi)\, \omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}).$$

Definition VII.2 Es seien $\omega \in \operatorname{Alt}^k V$ und $\eta \in \operatorname{Alt}^l V$. Dann ist das ***äußere Produkt*** $\omega \wedge \eta \in \operatorname{Alt}^{k+l} V$ von ω und η durch

$$(\omega \wedge \eta)\,(v_1, \ldots, v_{k+l}) := \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\pi)\, \omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)})\, \eta(v_{\pi(k+1)}, \ldots, v_{\pi(k+l)})$$

definiert.

Lemma VII.1 *Das äußere Produkt ist*

i) bilinear

ii) assoziativ

iii) antikommutativ, d.h. es gilt $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\, \eta \wedge \omega$ *für* $\omega \in \operatorname{Alt}^k V$, $\eta \in \operatorname{Alt}^l V$

iv) $1 \wedge \omega = \omega \wedge 1$ *für* $1 \in \operatorname{Alt}^0 V = \mathbb{R}$

Beweis iii) Es gilt

$$\omega \wedge \eta = \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\pi)\, \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)})\, \eta(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}),$$

$$\eta \wedge \omega = \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\pi)\, \eta(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)})\, \omega(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}).$$

Die Permutation $1 \mapsto l+k, \dots, k \mapsto l+k$ hat das Signum $(-1)^{kl}$. □

Bemerkung Durch Induktion gilt auch für $\omega_i \in \operatorname{Alt}^{k_i} V$, $1 \le i \le N$,

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_N)(v_1, \dots, v_{k_1+\dots+k_N}) = \sum_{\pi \in S_{k_1+\dots+k_N}} \frac{\operatorname{sgn}(\pi)}{k_1! \cdots k_N!} \prod_i \omega_i(v_{\pi(k_1+\dots+k_{i-1}+1)}, \dots, v_{\pi(k_1+\dots+k_i)}).$$

Speziell gilt für $\omega_1, \dots, \omega_k \in V^*$ und $v_1 \dots, v_k \in V$

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(v_1, \dots, v_k) = \det\big((\omega_i(v_j))_{ij}\big).$$

Satz VII.1 *Es sei $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ eine Basis von V^*. Dann ist*

$$\{\delta_{i_1} \wedge \dots \wedge \delta_{i_k} : 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n\}$$

eine Basis von $\operatorname{Alt}^k V$. Ist (e_i) die zu (δ_i) duale Basis von V, so gilt

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} a_{i_1 \dots i_k} (\delta_{i_1} \wedge \dots \wedge \delta_{i_k})$$

wobei $a_{i_1 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$. Insbesondere ist $\dim \operatorname{Alt}^k V = \binom{n}{k}$. Es gilt also $\operatorname{Alt}^k V = \{0\}$ für alle $k > n$.

Beweis Mit $\omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = a_{j_1 \cdots j_k}$ gilt

$$\Big(\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} a_{i_1 \dots i_k} (\delta_{i_1} \wedge \dots \wedge \delta_{i_k})\Big)(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} a_{i_1 \dots i_k} \underbrace{\delta_{i_1}(e_{j_1})}_{=\delta_{i_1 j_1}} \cdots \underbrace{\delta_{i_k}(e_{j_k})}_{=\delta_{i_k j_k}}$$
$$= \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}).$$

Ist weiter

$$\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} b_{i_1 \dots i_k} (\delta_{i_1} \wedge \dots \wedge \delta_{i_k}) = 0,$$

so folgt durch Auswertung auf $e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$ $(j_1 < \dots < j_k)$

$$0 = \Big(\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} b_{i_1 \dots i_k} (\delta_{i_1} \wedge \dots \wedge \delta_{i_k})\Big)(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = b_{j_1 \dots j_k}.$$

□

Definition VII.3 Es seien V, W endlich dimensionale reelle Vektorräume und $f\colon V \to W$ linear. Ist $\omega \in \operatorname{Alt}^k W$, so ist die ***zurückgeholte Form*** $f^*\omega \in \operatorname{Alt}^k V$ definiert durch

$$(f^*\omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(fv_1, \dots, fv_k),\ v_1, \dots, v_k \in V.$$

Lemma VII.2 *Es seien V, W endlich dimensionale reelle Vektorräume. Dann gilt*

$$f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$$

für alle $\omega \in \operatorname{Alt}^k W$, $\eta \in \operatorname{Alt}^l W$ und lineare Abbildungen $f : V \to W$.

Beweis Aus

$$(\omega \wedge \eta)(w_1, \ldots, w_{k+l}) = \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\pi)\, \omega(w_{\pi(1)}, \ldots, w_{\pi(k)})\, \eta(w_{\pi(k+1)}, \ldots, w_{\pi(k+l)})$$

folgt

$$\big(f^*(\omega \wedge \eta)\big)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\pi \in S_{k+1}} \operatorname{sgn}(\pi)\, \omega(f v_{\pi(1)}, \ldots, f v_{\pi(k)})\, \eta(f v_{\pi(k+1)}, \ldots, f v_{\pi(k+l)}).$$

□

Lemma VII.3 *Ist $W = V$ und $\omega \in \operatorname{Alt}^n V$ mit $n = \dim V$, so gilt $f^*\omega = (\det f)\omega$ für jede lineare Abbildung $f \colon V \to V$.*

Beweis Es ist $\dim(\operatorname{Alt}^n V) = 1$ und die Abbildung $f^* \colon \operatorname{Alt}^n V \to \operatorname{Alt}^n V$ ist linear. Also gilt $f^*\omega = c\,\omega$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $\omega \in \operatorname{Alt}^n V$. Sei $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus und $\overline{\omega} := \phi^* \det \in \operatorname{Alt}^n V$.

Dann gilt für die Standardbasis (e_i) von $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
c &= c \det(e_1, \ldots, e_n) \\
&= c\,\overline{\omega}(\phi^{-1}e_1, \ldots, \phi^{-1}e_n) \\
&= f^*\overline{\omega}(\phi^{-1}e_1, \ldots, \phi^{-1}e_n) \\
&= \overline{\omega}(f\phi^{-1}e_1, \ldots, f\phi^{-1}e_n) \\
&= \phi^* \det(f\phi^{-1}e_1, \ldots, f\phi^{-1}e_n) \\
&= \det(\phi f \phi^{-1}e_1, \ldots, \phi f \phi^{-1}e_n) = \det f.
\end{aligned}$$

□

VIII Differentialformen in $\mathbb{R}^n$

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

Definition VIII.1 Eine ***Differentialform der Ordnung k*** (kurz ***k-Form***) auf G, $k \in \mathbb{N}_0$, ist eine Abbildung

$$\omega\colon G \to \operatorname{Alt}^k \mathbb{R}^n.$$

Beispiel 1) 0-Formen sind Funktionen $f\colon G \to \mathbb{R}$.

2) Ist $f \in C^1(G)$, so ist $x \mapsto \mathrm{D}f(x)$ eine 1-Form.

Bemerkung 1) Addition bzw. skalare Multiplikation von k-Formen sind definiert durch

$$(\omega_1 + \omega_2)(x) := \omega_1(x) + \omega_2(x),$$
$$(\lambda\,\omega)(x) := \lambda\omega(x)$$

und ebenso

$$(\omega \wedge \eta)(x) := \omega(x) \wedge \eta(x).$$

2) Ist $f\colon G \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so schreibt man $\mathrm{d}f$ statt $\mathrm{D}f$ im Rahmen von Formen. Sei x_i die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_i$. Dann gilt $\mathrm{d}x_i(x)e_j = \delta_{ij}$, also ist $\{\mathrm{d}x_i\}$ die duale Basis zu $\{e_i\}$. Aus Satz VII.1 folgt, dass für eine k-Form ω gilt

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} a_{i_1 \ldots i_k} (\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}),$$

wobei $a_{i_1 \ldots i_k} = \omega(x)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$.

Beispiel Ist $f\colon G \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt

$$\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j,$$

denn es ist $\mathrm{d}f(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ und $\big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\big)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Definition VIII.2 Seien $G_1 \subset \mathbb{R}^m, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(G_1, G_2)$ und ω eine Differentialform der Ordnung k auf G_2. Die auf G_1 zurückgeholte Form $f^*\omega$ ist definiert durch

$$f^*\omega(x) := ((\mathrm{D}f)^*\omega)(f(x)),$$

also

$$f^*\omega(x)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(f(x))(\mathrm{D}f(x)v_1, \ldots, \mathrm{D}f(x)v_k).$$

Satz VIII.1 *Es gibt genau eine Möglichkeit jeder differenzierbaren k-Form ω, $k \in \mathbb{N}_0$, eine $(k+1)$-Form $\mathrm{d}\omega$ zuzuordnen, so dass*

i) d *linear ist,*

ii) $\mathrm{d}f = \mathrm{D}f$ *für* $f : G \to \mathbb{R}$ *differenzierbar (also* $k = 0$*),*

iii) Die Produktregel

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta,$$

gilt, wobei ω *eine* k*-Form und* η *eine beliebige Form ist,*

iv) und folgende Eigenschaft gilt

$$\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = 0 \quad \forall\, \omega \in C^2(G, \mathrm{Alt}^k \mathbb{R}^n).$$

Ist ω *gegeben durch*

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

so gilt

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \mathrm{d}a_{i_1 \ldots i_k} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.$$

Definition VIII.3 Die durch den Satz festgelegte Operation wird mit d bezeichnet. Ist ω eine differenzierbare Differentialform, so heißt $\mathrm{d}\omega$ die ***äußere Ableitung*** von ω.

Beweis (von Satz VIII.1) Es gilt nach i), iii), iv):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}\Big(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \Big) \\
&\overset{\text{i)}}{=} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \mathrm{d}(a_{i_1 \ldots i_k} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) \\
&\overset{\text{iii)}}{=} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} (\mathrm{d}a_{i_1 \ldots i_k} \wedge (\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) + a_{i_1 \ldots i_k} \underbrace{\mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}))}_{=0 \text{ nach iv)}} \\
&= \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \mathrm{d}a_{i_1 \ldots i_k} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass aus dieser Formel die Eigenschaften i) $-$ iv) folgen: i) und ii) sind klar. Zu iii): Seien ohne Einschränkung $\omega = a_I \, \mathrm{d}x_I, \eta = a_J \, \mathrm{d}x_J$ mit $\mathrm{d}x_I := \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}$ und $\mathrm{d}x_J := \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_l}$. Weiter sei $i_r \neq j_s$ für alle $1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq l$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(a_I \, \mathrm{d}x_I \wedge a_J \, \mathrm{d}x_J) &= \mathrm{d}(a_I a_J \, \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J) \\
&= \mathrm{d}(a_I a_J) \wedge \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J \\
&= (\mathrm{d}a_I a_J + a_I \, \mathrm{d}a_J) \wedge \mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J \\
&= \underbrace{\mathrm{d}a_I \wedge \mathrm{d}x_I}_{=\mathrm{d}\omega} \wedge a_J \, \mathrm{d}x_J + \underbrace{\mathrm{d}a_J \wedge (a_I \, \mathrm{d}x_I) \wedge \mathrm{d}x_J}_{=(-1)^k (a_I \, \mathrm{d}x_I) \wedge \mathrm{d}a_J \wedge \mathrm{d}x_J} \\
&= \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta
\end{aligned}$$

iv)

a) Sei f eine 0-Form, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathrm{d}f = \mathrm{d}(\mathrm{d}f) &= \mathrm{d}\big(\sum_{j=1}^n \partial_j f \,\mathrm{d}x_j\big) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathrm{d}(\partial_j f \,\mathrm{d}x_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \partial_i \partial_j f \,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \\ &= \sum_{i<j} (\partial_i \partial_j f \,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j + \partial_j \partial_i f \,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i) \\ &= \sum_{i<j} \underbrace{(\partial_i \partial_j f - \partial_j \partial_i f)}_{=0} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = 0. \end{aligned}$$

b) Für allgemeine ω folgt

$$\mathrm{d}\mathrm{d}\Big(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} \,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k} \Big) = \mathrm{d}\Big(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} \mathrm{d}a_{i_1 \ldots i_k} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \Big) \overset{\text{iii)}}{=} 0$$

mit Teil a).

$\square$

Beispiel 1) $f : G \to \mathbb{R}$ differenzierbar $\implies \mathrm{d}f = \sum_{j=1}^n \partial_j f \,\mathrm{d}x_j$

2) Jede $(n-1)$-Form ω kann als

$$\begin{aligned} \omega = &\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j \,\mathrm{d}x_i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j-1} \wedge \mathrm{d}x_{j+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \\ =: &\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j \,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \end{aligned}$$

geschrieben werden. Es gilt:[1]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^n \partial_i f_j \,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \partial_j f_j \,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_j f_j \,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \\ &= \operatorname{div} f \,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \end{aligned}$$

für $f := (f_1, \ldots, f_n)$.

[1] Man beachte, dass $\mathrm{d}((-1)^{j-1} f_j) = \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} \partial_i f_j \,\mathrm{d}x_i$ gilt.

3) Für jede 1-Form $\omega = f_1\,\mathrm{d}x_1 + f_2\,\mathrm{d}x_2 + f_3\,\mathrm{d}x_3$ im $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega = {} & \mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}f_2 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}f_3 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
= {} & \quad \partial_2 f_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + \partial_3 f_1\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\
& + \partial_1 f_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \partial_3 f_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 \\
& + \partial_1 f_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \partial_2 f_3\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
= {} & \quad (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
& + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3)\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\
& + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2
\end{aligned}$$

Definiere das ***Linienelement*** $\mathrm{d}s := \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \mathrm{d}x_3 \end{pmatrix}$, das ***Flächenelement*** $\mathrm{d}F := \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \end{pmatrix}$ und das ***Volumenelement*** $\mathrm{d}V := \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \nabla f \cdot \mathrm{d}s \\
\mathrm{d}(g \cdot \mathrm{d}s) &= \operatorname{rot} g \cdot \mathrm{d}F \\
\mathrm{d}(h \cdot \mathrm{d}F) &= \operatorname{div} h\,\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

Aus $\mathrm{dd} = 0$ folgt $\operatorname{rot}\nabla = 0$ und $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$.

Satz VIII.2 *Seien $G_1 \subset \mathbb{R}^m, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(G_1, G_2)$. Weiter sei ω eine Differentialform auf G_2. Dann ist $f^*\omega$ auch differenzierbar mit*

$$\mathrm{d}(f^*\omega) = f^*(\mathrm{d}\omega).$$

Beweis 1) Sei g eine 0-Form. Dann ist $f^*g = g \circ f$ differenzierbar und es gilt

$$(f^*\,\mathrm{d}g)(x)(v) = \mathrm{d}g(f(x))(\mathrm{D}f(x)v) = \mathrm{D}(g \circ f)(x)v = \mathrm{d}(f^*g)(x)(v)$$

für alle $x \in G_1$ und $v \in \mathbb{R}^m$.

2) Für ein allgemeines $\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k}\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ gilt

$$\begin{aligned}
f^*\,\mathrm{d}\omega &= \sum_{i_1 < \ldots < i_k} f^*\,\mathrm{d}a_{i_1 \ldots i_k} \wedge f^*\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge f^*\,\mathrm{d}x_{i_k} \\
&\overset{1)}{=} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \mathrm{d}(f^* a_{i_1 \ldots i_k}) \wedge \mathrm{d}(f^* x_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}(f^* x_{i_k}) \\
&= \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \mathrm{d}(f^* a_{i_1 \ldots i_k}) \wedge \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_{i_k}
\end{aligned}$$

und

$$\mathrm{d}(f^*\omega) = \mathrm{d}\Big(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} f^* a_{i_1 \ldots i_k} \underbrace{f^*\,\mathrm{d}x_{i_1}}_{\overset{1)}{=} \mathrm{d}f_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \underbrace{f^*\,\mathrm{d}x_{i_k}}_{\overset{1)}{=} \mathrm{d}f_{i_k}} \Big) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \mathrm{d}(f^* a_{i_1 \ldots i_k}) \wedge \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_{i_k}.$$

$\square$

IX Integration von Differentialformen

Definition IX.1 Eine n-Form $\omega = f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ heißt ***integrierbar*** über $A \subset G \subset \mathbb{R}^n$ (G offen, A messbar), falls f integrierbar ist. Man definiert, wenn φ orientierungstreu ist:

$$\int_A \omega := \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz IX.1 *Sind $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to V$ ein orientierungstreuer C^1-Diffeomorphismus und ω eine integrierbare n-Form auf V, so gilt*

$$\int_U \varphi^*\omega = \int_V \omega.$$

Beweis Analog zu der Aussage in Lemma VII.3 gilt

$$\varphi^*\omega = (\det \mathrm{D}\varphi)\omega \circ \varphi,$$

denn für $\omega = f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ gilt

$$(\varphi^*\omega)(x)(e_1, \ldots, e_n) = \omega(\varphi(x))(\partial_1\varphi, \ldots, \partial_n\varphi) = f(\varphi(x)) \det \mathrm{D}\varphi = (\det \mathrm{D}\varphi)(\omega \circ \varphi)(e_1, \ldots, e_n).$$

Mit dem Transformationssatz folgt

$$\int_U \varphi^*\omega = \int_U \det \mathrm{D}\varphi\ \omega \circ \varphi = \int_V \omega.$$

□

Definition IX.2 Es sei $M \subset G$ eine m-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $\phi : U \to V$ sei eine Karte eines die Orientierung induzierenden Atlases. Ist

$$\omega : G \to \mathrm{Alt}^m \mathbb{R}^n$$

eine m-Form, so dass ω auf $M \setminus V$ verschwindet, so heißt ω ***integrierbar***, wenn $\phi^*\omega$ auf U integrierbar ist. Man setzt

$$\int_M \omega := \int_U \phi^*\omega.$$

Bemerkung Angenommen wir haben Karten $\phi_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$, mit $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ und $\omega : G \to \mathrm{Alt}^m \mathbb{R}^n$ mit $\omega = 0$ in $M \setminus (V_1 \cap V_2)$. Sei

$$\varphi : \phi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to \phi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

der Kartenwechsel (dieser ist orientierungstreu), dann gilt

$${\phi_1}^*\omega = (\phi_2 \circ \varphi)^*\omega = \varphi^*({\phi_2}^*\omega).$$

Mit Satz IX.1 folgt

$$\int_{U_1} {\phi_1}^*\omega = \int_{U_1} \varphi^*({\phi_2}^*\omega) = \int_{U_2} {\phi_2}^*\omega,$$

so dass die Definition unabhängig von der Wahl der Karte ist.

Definition IX.3 Sei $M \subset G \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit die durch den endlichen Atlas $\{\phi_j : U_j \to V_j,\, 1 \le j \le N\}$ orientiert ist. Eine m-Form ω heißt ***integrierbar***, wenn $\chi_{V_j}\,\omega$ für eine untergeordnete Zerlegung der Eins integrierbar ist[1]. Ist (α_j) eine der Überdeckung $\{V_j\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins, so wird das ***Integral von ω über M*** definiert durch[2]

$$\int_M \omega := \sum_{j=1}^{N} \int_M \alpha_j \omega.$$

Satz IX.2 (Stokes) *Sei $M \subset G \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte m-dimensionale C^2-Untermannigfaltigkeit, $\Omega \subset M$ kompakt mit glattem Rand und ω eine stetig differenzierbare $(m-1)$-Form auf G, $m \ge 2$. Der Rand von Ω trage die induzierte Orientierung. Dann gilt*

$$\int_\Omega \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

Für $m = 1$ ergibt sich aus Satz IX.2 der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und für $m = n$ der Satz von Gauß.

Lemma IX.1 *Sei ω eine stetig differenzierbare $(m-1)$-Form mit kompakten Träger auf $\mathbb{R}^m$, $m \ge 2$. Dann gilt*

$$\int_{\{x_1 \le 0\}} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\{x_1 \le 0\}} \omega.$$

Beweis Schreibe ω als

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} f_j \; \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$$

mit $f_j \in C^1(\mathbb{R}^k)$, $\operatorname{spt} f_j$ kompakt. Es folgt mit $f = (f_1, \ldots, f_k)$

$$\int_{\{x_1 \le 0\}} \mathrm{d}\omega = \int_{\{x_1 \le 0\}} (\operatorname{div} f)\, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k = \int_{\{x_1 \le 0\}} (\operatorname{div} f)\, \mathrm{d}x.$$

Mit dem Satz von Fubini gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_j f_j \, \mathrm{d}x_j = 0$$

für alle $j = 1, \ldots, k$ (denn $\operatorname{spt} f_j$ ist kompakt) und

$$\int_{-\infty}^{0} \partial_1 f_1 \, \mathrm{d}x_1 = f_1(0, x_2, \ldots, x_k).$$

Also folgt

$$\int_{\{x_1 \le 0\}} \mathrm{d}\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x')\, \mathrm{d}x'.$$

Wir schreiben Elemente von $\mathbb{R}^{k-1}$ als $x' = (x'_1, \ldots, x'_{k-1})$ und entsprechend $\mathrm{d}x'_i$ für $i = 1, \ldots, k-1$. Die Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $\phi(x) = x$ induziert die Karte

$$\phi'\colon \mathbb{R}^{k-1} \to \partial\{x_1 \le 0\} = \{x_1 = 0\},\; x' \mapsto \phi(0, x') = (0, x')$$

[1] χ_{V_j} bezeichnet die charakteristische Funktion zu V_j.

[2] Man beachte, dass α_j einen Träger in V_j hat. Der Ausdruck wird insgesamt zu $\sum_{j=1}^{N} \int_{U_j} \phi_j{}^*(\alpha_j \omega)$.

von $\partial\{x_1 \leq 0\}$. Es gilt

$$(\phi')^* \,\mathrm{d}x_j(v) = \mathrm{d}(x_j \circ \phi')(\mathrm{D}\phi' v) = \begin{cases} \mathrm{d}x'_{j-1}(\mathrm{D}\phi' v), & \text{für } j \geq 2 \\ 0, & \text{für } j = 1 \end{cases}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\{x_1 \leq 0\}} \omega &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} (\phi')^* \omega \\
&= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} f_j(\phi'(x'))(\phi')^* \,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{(\phi')^* \,\mathrm{d}x_j} \wedge \ldots \wedge (\phi')^* \,\mathrm{d}x_k \\
&= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(\phi'(x')) \,\mathrm{d}x'_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x'_{k-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x') \,\mathrm{d}x'.
\end{aligned}$$

□

Beweis (von Satz IX.2) $\mathcal{A}$ sei ein orientierter Atlas aus Rand-adaptierten Karten. Da Ω kompakt ist, gibt es endlich viele Karten $\phi_j : U_j \to V_j$, $j = 1, \ldots, N$, so dass $\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{N} V_j$ ist.

Es sei (α_j) eine der Überdeckung (V_j) untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann können wir ${\phi_j}^*(\mathrm{d}(\alpha_j\omega))$ durch 0 stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^m$ fortsetzen. Wir haben

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{d}(\alpha_j\omega) = \int_{\Omega\cap V_j} \mathrm{d}(\alpha_j\omega) &= \int_{U_j \cap\{x_1 \leq 0\}} {\phi_j}^*(\mathrm{d}(\alpha_j\omega)) \\
&\overset{\text{Satz VIII.2}}{=} \int_{U_j \cap\{x_1 \leq 0\}} \mathrm{d}({\phi_j}^*(\alpha_j\omega)) \\
&= \int_{\{x_1 \leq 0\}} \mathrm{d}({\phi_j}^*(\alpha_j\omega)).
\end{aligned}$$

Sei nun $\phi'_j = \phi_j \circ P \colon U'_j \to V_j$ mit $P(x') = (0, x')$ die von ϕ_j induzierte Randkarte, so ist

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \alpha_j\omega = \int_{\partial\Omega\cap V_j} \alpha_j\omega &= \int_{U'_j} (\phi'_j)^*(\alpha_j\omega) \\
&= \int_{U'_j} P^*({\phi_j}^*(\alpha_j\omega)) \\
&= \int_{U_j \cap\{x_1 = 0\}} {\phi_j}^*(\alpha_j\omega) \\
&= \int_{\{x_1 = 0\}} {\phi_j}^*(\alpha_j\omega),
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass wir ${\phi_j}^*(\alpha_j\omega)$ durch 0 stetig nach $\{x_1 = 0\}$ fortsetzen können.

Mit Lemma IX.1 folgt

$$\int_\Omega \mathrm{d}(\alpha_j\omega) = \int_{\partial\Omega} \alpha_j\omega.$$

Die Behauptung folgt dann durch Summation über j. □

X Satz vom Igel

Seien M^k, N^k zwei orientierte kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Zwei Abbildungen $f_0, f_1\colon M^k \to N^k$ heißen ***homotop***, falls eine glatte Abbildung

$$F\colon M^k \times [0,1] \to N^k$$

existiert mit $F(x,0) = f_0(x)$ und $F(x,1) = f_1(x)$.

Satz X.1 *Ist ω eine k-Form auf N^k und sind $f_0, f_1 : M^k \to N^k$ homotop, so gilt*

$$\int_{M^k} {f_0}^*\omega = \int_{M^k} {f_1}^*\omega.$$

Beweis Die Menge $M^k \times [0,1]$ ist eine $(k+1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand

$$\partial(M^k \times [0,1]) = (M^k \times \{1\}) \cup (M^k \times \{0\}).$$

Mit dem Satz von Stokes und unter Beachtung der verschiedenen Orientierungen des Randes von $M \times [0,1]$ folgt

$$\int_{M^k} {f_1}^*\omega - \int_{M^k} {f_0}^*\omega = \int_{\partial(M^k\times[0,1])} F^*\omega = \int_{M^k\times[0,1]} \mathrm{d}(F^*\omega) = \int_{M^k\times[0,1]} F^*(\mathrm{d}\omega) = 0,$$

denn $\mathrm{d}\omega = 0$, da es auf N^k keine nichtverschwindenden $(k+1)$-Formen gibt. □

Satz X.2 *Die Abbildung $A\colon S^n \to S^n$, $A(x) = -x$ ist nur für ungerade Dimension homotop zur Identität.*

Beweis In $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachte die n-Form

$$\omega^n = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i \,\mathrm{d}x_i \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n+1}.$$

Es gilt

$$d\omega^n = \sum_{i=1}^{n+1} \partial_i x_i \,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n+1} = (n+1)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n+1}.$$

Also folgt aus dem Satz von Stokes

$$\int_{S^n} \omega^n = \int_{B_1^{n+1}(0)} (n+1)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n+1} = (n+1)\,\mathrm{vol}(B_1^{n+1}(0)) = \mathrm{vol}(S^n).$$

Ist A homotop zur Identität, so gilt

$$\int_{S^n} A^*\omega^n = \int_{S^n} \omega^n = \mathrm{vol}(S^n).$$

Es gilt aber $A^*\omega^n = (-1)^{n+1}\omega^n$. Damit ist $(-1)^{n+1}\,\mathrm{vol}(S^n) = \mathrm{vol}(S^n)$, so dass $n = 2k+1$ folgt. □

Satz X.3 (Satz vom Igel) *Eine Sphäre S^n mit $n = 2k$ besitzt kein nirgends verschwindendes, stetiges, tangentiales Vektorfeld.*

Beweis Angenommen, es existiert solch ein tangentiales Vektorfeld $V : S^n \to S^n$, welches ohne Einschränkung glatt ist (betrachte eine Approximation durch glatte Funktionen nach dem Satz von Weierstrass). Definiere dann die Homotopie

$$F : S^n \times [0,1] \to S^n,\ F(x,t) := \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)V(x).$$

Es gilt $\|F(x,t)\|^2 = \cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t) = 1$ und $F(x,0) = x,\ F(x,1) = -x$. Hierbei wurden die Tatsachen

$$||V(x)|| = 1 \quad \text{und} \quad \langle x, V(x)\rangle = 0.$$

für alle $x \in S^n$ benutzt.

Aus Satz X.2 folgt dann $n = 2k + 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] Agricola, Ilka: *Vektoranalysis.*

[2] Amann, Herbert; Escher, *Joachim: Analysis II und III.*

[3] Carmo, Manfredo P. Do: *Differential Forms and Applications.*

[4] Fleming, Wendell: *Functions of Several Variables.*

[5] Forster, Otto: *Analysis 3.*

[6] Giaquinta, Mariano; Modica, Giuseppe: *Mathematical Analysis.*

[7] Jänich, Klaus: *Vektoranalysis*

[8] Königsberger, Konrad: *Analysis 2.*

[9] Spivak, Michael: *Calculus On Manifolds.*

[10] Alt, Hans Wilhelm: *Lineare Funktionalanalysis.*

Stichwortverzeichnis