Höhere Mathematik II für Physiker

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Prof. Dr. Tobias Lamm

Sommersemester 2013

Einleitung

Dieses Skript basiert wesentlich auf den Vorlesungsskripten von Prof. Dr. Ernst Kuwert (Universität Freiburg) und Prof. Dr. Michael Struwe (ETH Zürich) zur Analysis II.

Ausserdem wurden die Bücher von O. Forster und K. Königsberger zur Analysis II verwendet.

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

1.1 Partielle Ableitungen

Wir kommen nun zur Differentiation von Funktionen im $\mathbb{R}^n$. Um für diese Ableitungen zu definieren, ist die einfachste und vielfach beste Idee, alle Variablen bis auf x_j als konstant aufzufassen und die resultierende Funktion der einen Variablen x_j wie üblich zu differenzieren. Auf diese Weise ergeben sich für $j = 1, \ldots, n$ die n partiellen Ableitungen der Funktion. Im Folgenden bezeichnet $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.1.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Die partielle Ableitung von f nach x_j an der Stelle $x \in \Omega$ ist der Grenzwert (falls existent)*

$$\partial_j f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}.$$

Andere Bezeichnungen sind $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ und $D_j f(x)$.

Die partielle Ableitung $\partial_j f(x)$ ist einfach die Ableitung der reellen Funktion

$(-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto f(x + te_j)$, an der Stelle $t = 0$, oder alternativ die Ableitung der reellen Funktion

$$(x_j - \delta, x_j + \delta) \to \mathbb{R}^m, \quad y \mapsto f(x_1, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

an der Stelle $y = x_j$. Der folgende Satz formuliert in diesem Zusammenhang wohlbekannte Ergebnisse der eindimensionalen Analysis (siehe Satz 8.1.5 und Satz 8.1.6, HM I).

Satz 1.1.1 (Ableitungsregeln). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in \Omega$. Die Existenz der partiellen Ableitungen $\partial_j f(x)$ und $\partial_j g(x)$ sei vorausgesetzt. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Linearität: *für $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\partial_j(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha\, \partial_j f(x) + \beta\, \partial_j g(x).$$

(b) Komponentenweise Differentiation: *für* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *gilt, wenn eine der Seiten existiert,*

$$\partial_j f(x) = \sum_{i=1}^{m} \partial_j f_i(x)\, e_i.$$

(c) Produktregel: *für* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *und* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *gilt*

$$\partial_j (fg)(x) = (\partial_j f)(x) g(x) + f(x)(\partial_j g)(x).$$

(d) Quotientenregel: *für* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *und* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *mit* $g(x) \neq 0$ *gilt*

$$\partial_j \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(\partial_j f)(x) g(x) - f(x)(\partial_j g)(x)}{g(x)^2}.$$

(e) Kettenregel: *ist* $f : \Omega \to I \subset \mathbb{R}$ *und* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $f(x)$, *so folgt*

$$\partial_j (\varphi \circ f)(x) = \varphi'(f(x)) \partial_j f(x).$$

Beispiel: Wir betrachten die Euklidische Abstandsfunktionen vom Nullpunkt

$$r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

In $x \neq 0$ existieren die partiellen Ableitungen, und zwar gilt mit der Kettenregel

$$\partial_j r(x) = \frac{2x_j}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_j}{r} \qquad \text{für } r = r(x) = \|x\|.$$

Im Nullpunkt sind die partiellen Ableitungen dagegen nicht definiert, denn $r(0 + te_i) = |t|$ ist in $t = 0$ nicht differenzierbar. Die Funktion $\partial_j r$ ist in $x \neq 0$ ihrerseits partiell differenzierbar, und wir erhalten die zweiten partiellen Ableitungen

$$\partial_i (\partial_j r)(x) = \frac{(\partial_i x_j) r - x_j \partial_i r}{r^2} = \frac{1}{r}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2}\right).$$

Ist $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, so berechnen wir weiter für $f = \varphi \circ r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\partial_j f(x) &= \varphi'(r) \partial_j r = \varphi'(r) \frac{x_j}{r}, \\
\partial_i (\partial_j f)(x) &= \varphi''(r) \partial_i r \partial_j r + \varphi'(r) \partial_i (\partial_j r) = \varphi''(r) \frac{x_i x_j}{r^2} + \frac{\varphi'(r)}{r}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2}\right).
\end{aligned}$$

Der Operator $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$ heißt Laplaceoperator, die Lösungen der Gleichung $\Delta f = 0$ heißen harmonische Funktionen. Wir können jetzt die rotationssymmetrischen harmonischen Funktionen ausrechnen, und zwar erhalten wir

$$0 \overset{!}{=} \Delta f(x) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = r^{1-n}\big(r^{n-1}\varphi'(r)\big)'.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen, mit Integrationskonstanten $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(r) = \begin{cases} a\,\dfrac{r^{2-n}}{2-n} + b & \text{für } n \geq 3 \\ a\,\log r + b & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Für $n = 3$ ist f das Newtonsche Gravitationspotential.

Im vorangegangenen Beispiel traten zweite partielle Ableitungen auf. Ist für $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ die Ableitungsfunktion $\partial_j f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ definiert und ihrerseits in $x \in \Omega$ nach x_i partiell differenzierbar, so setzen wir

$$\partial_i \partial_j f(x) := \partial_i(\partial_j f)(x) \qquad \text{(alternative Notation } D^2_{ij} f(x) \text{ oder } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)). \tag{1.1}$$

Entsprechend für Ableitungen beliebiger Ordnung: ist für $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ die Ableitungsfunktion $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definiert und in $x \in \Omega$ nach x_i partiell differenzierbar, so setzen wir induktiv

$$\partial_i \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f(x) = \partial_i(\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f)(x). \tag{1.2}$$

Die folgenden Klassen von Funktionen spielen in der Analysis eine wichtige Rolle. Wir werden sehen, dass die Eigenschaft der Stetigkeit der partiellen Ableitungen in vielen Anwendungen wesentlich ist.

Definition 1.1.2 (C^k-Räume)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Wir bezeichnen mit $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω mit Werten im $\mathbb{R}^m$, das heißt alle partiellen Ableitungen $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_j} f$ der Ordnung $j \leq k$ (bzw. $j < \infty$ im Fall $k = \infty$) sind definiert und stetig auf Ω. Im reellwertigen Fall, also $m = 1$, setzen wir $C^k(\Omega, \mathbb{R}) = C^k(\Omega)$.*

Wir wollen nun zeigen, dass die Operatoren ∂_i und ∂_j auf C^2-Funktionen vertauschen. Aus der Existenz der partiellen Ableitungen $\partial_i \partial_j f$ und $\partial_j \partial_i f$ allein folgt das nicht, wie das Beispiel

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1.3}$$

zeigt. Für diese Funktion ist $\partial_1 \partial_2 f(0,0) = 1$, aber $\partial_2 \partial_1 f(0,0) = -1$.

Satz 1.1.2 (Symmetrie der 2. Ableitung, H. A. Schwarz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f \in C^2(\Omega)$, so vertauschen für $1 \leq i, j \leq n$ die Ableitungen nach x_i und x_j:*

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f \qquad \textit{auf } \Omega.$$

Beweis: Nach Definition ist $\partial_j f(x)$ Grenzwert der Differenzenquotienten

$$\Delta_j^t f(x) = \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} \qquad \text{für } t \to 0.$$

Für $\Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x) = \frac{1}{s}\Big(\Delta_j^t f(x + se_i) - \Delta_j^t f(x)\Big)$ folgt

$$\lim_{s \to 0} \Big(\lim_{t \to 0} \Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x)\Big) = \partial_i(\partial_j f)(x).$$

Das Problem besteht darin, die beiden Grenzwerte zu vertauschen. Der Differenzenquotient vertauscht immerhin mit der partiellen Ableitung:

$$\partial_i(\Delta_j^t f)(x) = \frac{1}{t}\big(\partial_i f(x + te_j) - \partial_i f(x)\big) = \Delta_j^t(\partial_i f)(x).$$

Wir verwenden nun den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Ist g nach x_i partiell differenzierbar, so gilt für ein $\alpha \in [0, 1]$:

$$\Delta_i^s g(x) = \frac{g(x + se_i) - g(x)}{s} = \partial_i g(x + \alpha s e_i).$$

Wir wenden das an auf $g = \Delta_j^t f$ und auf $g = \partial_i f$, wobei $\alpha, \beta \in [0, 1]$ von s, t abhängen:

$$\Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x) = \partial_i(\Delta_j^t f)(x + \alpha s e_i) = \Delta_j^t(\partial_i f)(x + \alpha s e_i) = \partial_j(\partial_i f)(x + \alpha s e_i + \beta t e_j).$$

Da nach Voraussetzung $\partial_j \partial_i f$ stetig in x ist, folgt die Behauptung, indem wir erst $t \to 0$ und dann $s \to 0$ gehen lassen. $\square$

Bemerkung: Tatsächlich haben wir gezeigt: existieren $\partial_i f$, $\partial_j f$, $\partial_j \partial_i f$ und ist $\partial_j \partial_i f$ stetig in x, so existiert auch $\partial_i \partial_j f(x)$ und es gilt $\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$.

Korollar 1.1.1. *Für eine Funktion $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ vertauschen die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k, das heißt für jede Permutation $\sigma \in S_k$ gilt*

$$\partial_{i_{\sigma(1)}} \ldots \partial_{i_{\sigma(k)}} f = \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f.$$

Beweis: Nach Satz 1.1.2 können benachbarte Operatoren ∂_i, ∂_j vertauscht werden. Die symmetrische Gruppe wird durch Transpositionen erzeugt. $\square$

Der Begriff der partiellen Ableitung allein ist nicht geeignet, um die mehrdimensionale Differentialrechnung zu entwickeln. Ein entscheidender Mangel ist, dass aus der Existenz der partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$ in $x \in \Omega$ nicht die Stetigkeit von f im Punkt x folgt.

Beispiel: Sei $\Omega = \mathbb{R}^2$ und

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dann gilt $f(x,0) = 0 = f(0,y)$, insbesondere $\partial_1 f(0,0) = 0 = \partial_2 f(0,0)$. Aber für $c(t) = (t,t)$ gilt $f(c(t)) = 1/2$ für alle $t \neq 0$, das heißt f ist nicht stetig im Nullpunkt.

Es wäre denkbar, dass sich ein besserer Ableitungsbegriff ergibt, wenn alle Richtungen gleichberechtigt betrachtet werden. Dies führt auf den Begriff der Richtungsableitung.

Definition 1.1.3 (Richtungsableitung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Für $x \in \Omega$ und $v \in \mathbb{R}^n$ heißt der Grenzwert (falls existent)*

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung v. Dies ist die gewöhnliche Ableitung der Funktion $t \mapsto f(x+tv)$ an der Stelle $t = 0$.

Beispiel: Die Richtungsableitung von $r(x) = \|x\|$ in $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\partial_v r(x) = \frac{d}{dt} \sqrt{\|x\|^2 + 2t\langle x, v\rangle + t^2\|v\|^2} \;|_{t=0} = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, v \right\rangle.$$

Leider reicht aber selbst die Existenz aller Richtungsableitungen von f in $x \in \Omega$ nicht aus, damit f auch stetig im Punkt x ist.

Beispiel: Betrachte jetzt auf $\Omega = \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dann existieren im Punkt (0,0) alle Richtungsableitungen, denn für $v = (a,b) \neq (0,0)$ ist

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{ab^2}{a^2 + t^2 b^4} = \begin{cases} b^2/a & \text{für } a \neq 0 \\ 0 & \text{für } a = 0. \end{cases}$$

Dennoch ist f im Nullpunkt unstetig, denn für $c(t) = (t^2, t)$ gilt $f(c(t)) = \frac{1}{2}$ für alle $t \neq 0$.

1.2 Die Ableitung

In Satz 8.1.3, HM I, hatten wir gesehen, dass die Differenzierbarkeit einer Funktion f im Punkt x_0 gleichbedeutend mit der Existenz einer affinlinearen Funktion ist, die in x_0 mit f in erster Ordnung übereinstimmt. Dieser Ableitungsbegriff hat sich für Funktionen mehrerer Variabler als der richtige durchgesetzt.

Definition 1.2.1 (Ableitung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt Ableitung von f im Punkt x_0, falls gilt:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \big(f(x_0) + A(x - x_0)\big)}{\|x - x_0\|} = 0. \tag{1.1}$$

f heißt dann differenzierbar in x_0 mit Ableitung $Df(x_0) = A$.

Mit der Substitution $h = x - x_0$ erhalten wir die äquivalente Fassung

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - \big(f(x_0) + A\, h\big)}{\|h\|} = 0. \tag{1.2}$$

Satz 1.2.1 (Berechnung der Ableitung)**.** *Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ sei in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann besitzt f in x_0 die Richtungsableitungen*

$$\partial_v f(x_0) = Df(x_0)v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

und $Df(x_0)$ hat bezüglich der Standardbasen die Matrixdarstellung (Jacobimatrix)

$$(\partial_j f_i(x_0)) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \dots & \dots & \partial_n f_1(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \dots & \dots & \partial_n f_m(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \tag{1.4}$$

Insbesondere ist die Ableitung durch (1.1) eindeutig bestimmt.

Beweis: Für $v = 0$ sind beide Seiten von (1.3) nach Definition gleich Null. Für $v \neq 0$

setzen wir $Df(x_0) = A$, und erhalten für $t \to 0$ aus (1.1)

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - Av\right\| &= \frac{\big\|f(x_0+tv) - \big(f(x_0) + A(tv)\big)\big\|}{|t|} \\ &= \frac{\big\|f(x_0+tv) - \big(f(x_0) + A(tv)\big)\big\|}{\|tv\|}\,\|v\| \to 0.\end{aligned}$$

Setzen wir $v = e_j$ und berechnen die partielle Ableitung komponentenweise, siehe Satz 1.1.1, so ergibt sich

$$Df(x_0)e_j = \partial_j f(x_0) = \sum_{i=1}^m \partial_j f_i(x_0) e_i.$$

$\square$

Im allgemeinen ist der Nachweis der Differenzierbarkeit direkt anhand der Definition 1.2.1 nicht so einfach. Hier ein paar Beispiele.

Beispiel: Sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symmetrisch (d.h. $b(v,w) = b(w,v)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$) und linear in jeder Komponente (eine sogenannte symmetrische Bilinearform). Wir betrachten die zugehörige quadratische Form $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = b(x,x)$. Wir behaupten, dass f in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$Df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ Df(x_0)v = 2\,b(v,x_0) \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n\,.$$

Die rechte Seite definiert eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Wir berechnen

$$f(x_0+h) = b(x_0+h, x_0+h) = f(x_0) + 2\,b(h,x_0) + b(h,h).$$

Nun gilt die Abschätzung

$$|b(h,h)| \le \sum_{i,j=1}^n |b(e_i,e_j)|\,|h_i|\,|h_j| \le C\|h\|^2 \quad \text{mit } C = \sum_{i,j=1}^n |b(e_i,e_j)|,$$

und es folgt

$$\frac{f(x_0+h) - \big(f(x_0) + 2b(h,x_0)\big)}{\|h\|} = \frac{b(h,h)}{\|h\|} \to 0 \quad \text{mit } h \to 0,$$

was zu zeigen war.

Beispiel: Die Funktion $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}^m$ habe in $x_0 \in I$ die Ableitung $f'(x_0) \in \mathbb{R}^m$ im Sinne von HM I. Dann ist f differenzierbar in x_0 im Sinne von Definition 1.2.1 mit

$$Df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \quad Df(x_0)h = f'(x_0)h.$$

Denn es gilt für $h \neq 0$, $h \to 0$

$$\frac{\|f(x_0+h) - (f(x_0) + f'(x_0)h)\|}{|h|} = \left\| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right\| \to 0.$$

Beispiel: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Dann ist die Einschränkung

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^m,\ f(x) = Ax \qquad \text{für alle } x \in \Omega,$$

in allen $x_0 \in \Omega$ differenzierbar mit Ableitung $Df(x_0) = A$. Dies folgt sofort wegen $f(x_0+h) = A(x_0+h) = Ax_0 + Ah = f(x_0) + Ah$.

Definition 1.2.2 (Gradient)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in \Omega$. Der Gradient von f im Punkt x ist der Vektor*

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x) e_j = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n\,.$$

Der Gradient ist der eindeutig bestimmte Vektor mit der Eigenschaft

$$\langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle = Df(x)v \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n\,. \tag{1.5}$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$. Ist $\operatorname{grad} f(x) = 0$, so heißt x kritischer Punkt von f. Ist x nicht kritisch, so ist die Richtung von $\operatorname{grad} f(x)$ diejenige, in der f am stärksten ansteigt. Denn für $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\partial_v f(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle \leq \|\operatorname{grad} f(x)\|, \text{“$=$“ genau wenn } v = \frac{\operatorname{grad} f(x)}{\|\operatorname{grad} f(x)\|}.$$

Beispiel: Der Gradient der Funktion $f(x) = \varphi(r)$ mit $r(x) = \|x\|$ ist nach dem Beispiel im ersten Abschnitt

$$\operatorname{grad} f(x) = \varphi'(r)\frac{x}{r} \qquad \text{für } x \neq 0.$$

Beispiel: Sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, und sei $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung (diese existiert immer und ist eindeutig bestimmt, siehe die Bemerkung nach Definition 15.4.1 in HM I) mit

$$b(x,y) = \langle x, By \rangle \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n\,.$$

Bezüglich der Standardbasis gilt $B_{ij} = b(e_i, e_j)$. Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = b(x, x)$, folgt

$$\operatorname{grad} f(x) = 2Bx \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Denn nach obigem Beispiel gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle = Df(x)v = 2b(v, x) = 2\langle v, Bx\rangle.$$

Im Beweis der Differentiationsregeln brauchen wir folgende Abschätzung für lineare Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\|A(x)\| \leq |A|\,\|x\| \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

mit $|A|^2 = \sum_{j=1}^n \|A(e_j)\|^2$.

Zum Beweis verwenden wir die Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasen

$$A(x) = \sum_{j=1}^n x_j A(e_j) \qquad \text{mit } A(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i.$$

Aus der Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}^m$ und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt

$$\|A(x)\|^2 \leq \Big(\sum_{j=1}^n |x_j|\,\|A(e_j)\|\Big)^2 \leq \Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n \|A(e_j)\|^2\Big) = |A|^2\,\|x\|^2.$$

Als Folgerung ergibt sich, dass jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitzstetig ist, genauer

$$\|A(x) - A(y)\| = \|A(x - y)\| \leq |A|\,\|x - y\|.$$

Satz 1.2.2 (Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x_0, so ist f stetig in x_0.*

Beweis: Wie soeben besprochen, sind affinlineare Funktionen stetig auf $\mathbb{R}^n$. Es reicht daher zu zeigen, dass die Funktion $\varphi(x) = f(x) - \big(f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)\big)$ stetig in x_0 ist. Aber $\varphi(x_0) = 0$, und nach Definition der Differenzierbarkeit gilt

$$\varphi(x) = \|x - x_0\|\,\frac{\varphi(x)}{\|x - x_0\|} \to 0 \qquad \text{mit } x \to x_0.$$

□

Wir müssen jetzt die Differentiationsregeln erarbeiten.

Satz 1.2.3 (Kettenregel)**.** *Seien $f : U \to \mathbb{R}^m$ und $g : V \to \mathbb{R}^p$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f(U) \subset V$. Sind f in x_0 und g in $f(x_0)$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f$*

in x_0 differenzierbar und es gilt die Kettenregel

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0).$$

Für die zugehörigen Jacobimatrizen bedeutet das mit $y_0 = f(x_0)$

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_k}(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y_0)\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) \quad \text{für } 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq k \leq n.$$

Beweis: Sei $y_0 = f(x_0)$, $Df(x_0) = A$, $Dg(y_0) = B$. Wir definieren für hinreichend kleine $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus\{0\}$, $\eta \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ die Funktionen

$$\varepsilon_f(\xi) = \frac{f(x_0+\xi) - (f(x_0) + A\xi)}{\|\xi\|} \quad \text{und} \quad \varepsilon_g(\eta) = \frac{g(y_0+\eta) - (g(y_0) + B\eta)}{\|\eta\|}.$$

Mit $\varepsilon_f(0) = 0$ und $\varepsilon_g(0) = 0$ sind beide Funktionen nach Voraussetzung im Nullpunkt stetig. Offensichtliche Kandidatin für die Ableitung von $g \circ f$ in x_0 ist BA, also berechnen wir

$$\begin{aligned}
& \frac{(g \circ f)(x_0 + \xi) - ((g \circ f)(x_0) + BA\xi)}{\|\xi\|} \\
= \ & \frac{g(y_0 + A\xi + \|\xi\|\varepsilon_f(\xi)) - (g(y_0) + BA\xi)}{\|\xi\|} \\
= \ & \frac{g(y_0) + B\eta + \|\eta\|\varepsilon_g(\eta) - (g(y_0) + BA\xi)}{\|\xi\|} \qquad \text{wobei } \eta = A\xi + \|\xi\|\,\varepsilon_f(\xi) \\
= \ & B\varepsilon_f(\xi) + \frac{\|\eta\|}{\|\xi\|}\,\varepsilon_g(\eta).
\end{aligned}$$

Wegen $\|B\varepsilon_f(\xi)\| \leq |B|\|\varepsilon_f(\xi)\|$ und $\|\eta\| \leq (|A| + \|\varepsilon_f(\xi)\|)\|\xi\| \leq C\|\xi\|$ konvergiert die rechte Seite wie gewünscht gegen Null. □

Beispiel: Spezialfall ist die Verkettung $f \circ c$ einer Kurve $c : (a,b) \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ist c differenzierbar in $t \in (a,b)$ und f differenzierbar in $c(t)$, so folgt

$$\frac{d(f \circ c)}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(c(t))\frac{dc_j}{dt}(t),$$

beziehungsweise in vektorieller Form

$$(f \circ c)'(t) = Df(x)c'(t) = \langle \operatorname{grad} f(x), c'(t)\rangle \quad \text{wobei } x = c(t).$$

Ist $f \circ c$ konstant, so folgt $\operatorname{grad} f(x) \perp c'(t)$. Anschaulich bedeutet das, der Gradient von f steht senkrecht auf die Niveaumengen $\{x \in \Omega : f(x) = \text{const.}\}$. Im zweidimensionalen Fall kann man sich die Niveaumengen als Höhenlinien vorstellen.

Weitere Regeln für den Umgang mit der Ableitung sind die folgenden.

Satz 1.2.4 (Ableitungsregeln)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in \Omega$. Die Existenz der Ableitungen $Df(x)$ und $Dg(x)$ sei jeweils vorausgesetzt. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Linearität: *für $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

$$D(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x).$$

(b) Produktregel: *für $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt*

$$D(fg)(x) = Df(x)g(x) + f(x)Dg(x).$$

(c) Quotientenregel: *für $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ gilt*

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{Df(x)g(x) - f(x)Dg(x)}{g(x)^2}.$$

Beweis: Wir setzen $Df(x) = A$, $Dg(x) = B$ sowie für $h \neq 0$

$$\varepsilon_f(h) = \frac{f(x+h) - (f(x) + Ah)}{\|h\|} \quad \text{und} \quad \varepsilon_g(h) = \frac{g(x+h) - (g(x) + Bh)}{\|h\|}.$$

Nach Voraussetzung gilt $\varepsilon_f(h) \to 0$, $\varepsilon_g(h) \to 0$ mit $h \to 0$. Mit der jeweils behaupteten Ableitung ist nun für $h \to 0$ der Grenzwert in (1.2) nachzuprüfen. Für (a) gilt

$$\frac{(\alpha f + \beta g)(x+h) - ((\alpha f + \beta g)(x) + (\alpha A + \beta B)h)}{\|h\|} = \alpha\varepsilon_f(h) + \beta\varepsilon_g(h) \to 0.$$

Für (b) berechnen wir mit etwas mehr Mühe

$$\begin{aligned}
& \frac{(fg)(x+h) - ((fg)(x) + (Ag(x) + f(x)B)\,h)}{\|h\|} \\
= {} & \frac{(f(x) + Ah + \varepsilon_f(h)\|h\|)(g(x) + Bh + \varepsilon_g(h)\|h\|)}{\|h\|} \\
& - \frac{(f(x)g(x) + g(x)Ah + f(x)Bh)}{\|h\|} \\
= {} & \frac{1}{\|h\|}(Ah)(Bh) + \varepsilon_f(h)\,(g(x) + Bh + \varepsilon_g(h)\|h\|) + \varepsilon_g(h)(f(x) + Ah).
\end{aligned}$$

Wie in (1.6) bemerkt gilt $\|Ah\| \leq |A|\|h\|$ sowie $\|Bh\| \leq |B|\|h\|$, also geht die rechte Seite mit $h \to 0$ gegen Null.

In (c) können wir $m = 1$ und $f \equiv 1$ annehmen, denn sonst schreiben wir $f/g = f(1/g)$ und verwenden (b). Es gilt

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\|h\|}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \Big(\frac{1}{g(x)} - \frac{Bh}{g(x)^2}\Big)\right) \\
= \; & \frac{1}{\|h\|}\,\frac{1}{g(x)g(x+h)}\Big(g(x) - \big(g(x) + Bh + \varepsilon_g(h)\|h\|\big) + \frac{g(x+h)}{g(x)}Bh\Big) \\
= \; & \frac{1}{g(x)g(x+h)}\left(\Big(\frac{g(x+h)}{g(x)} - 1\Big)\frac{Bh}{\|h\|} - \varepsilon_g(h)\right).
\end{aligned}
$$

Wegen $g(x) \neq 0$ und $g(x+h) \to g(x)$ mit $h \to 0$ nach Satz 1.2.2 geht die rechte Seite wieder gegen Null mit $h \to 0$. □

Die koordinatenfreie Notation ermöglicht oft ein gutes geometrisches Verständnis für die Ableitung als lineare Abbildung. Allerdings ist beim Umgang mit Zeilen- und Spaltenvektoren Vorsicht geboten, zum Beispiel kann bei der Produktregel Verwirrung entstehen, wenn eine der beteiligten Funktionen vektorwertig sind. Erst recht wird die Notation kompliziert, wenn zweite oder höhere Ableitungen zu bilden sind. Im Zweifelsfall sollte man auf die partiellen Ableitungen zurückgreifen.

Satz 1.2.5 (komponentenweise Differentiation)**.** *$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, wenn alle Komponenten $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, in x_0 differenzierbar sind. Ist $P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Projektion auf die i-te Koordinate, so gilt $Df_i(x_0) = P_i\, Df(x_0)$.*

Beweis: Es gilt nach Definition

$$
Df(x_0) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \big(f(x_0) + A(x - x_0)\big)}{\|x - x_0\|} = 0.
$$

Die Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ ist gleichbedeutend mit der Konvergenz aller Komponenten. Durch Anwendung von P_i ergibt sich daher weiter die äquivalente Formulierung

$$
\lim_{x \to x_0} \frac{f_i(x) - \big(f_i(x_0) + P_i A(x - x_0)\big)}{\|x - x_0\|} = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, m. \tag{1.7}
$$

Aus $Df(x_0) = A$ folgt somit $Df_i(x_0) = P_i A$. Ist umgekehrt $Df_i(x_0) = A_i$ für $i = 1, \ldots, m$, so definieren wir die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch $A(x) = \sum_{i=1}^m A_i(x) e_i$. Dann ist $P_i A = A_i$, also gilt (1.7) und somit $Df(x_0) = A$. □

Wie besprochen kann aus der Existenz der partiellen Ableitungen nicht auf die Differenzierbarkeit geschlossen werden, ja nicht einmal auf die Stetigkeit. Das ist schade, denn die partiellen Ableitungen sind so schön einfach auszurechnen, während der Nachweis der Differenzierbarkeit anhand der Definition 1.2.1 etwas Aufwand erfordert. Der folgende Satz liefert ein zentrales, hinreichendes Kriterium für die Differenzierbarkeit einer Funktion.

Satz 1.2.6 (stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow$ differenzierbar)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ sei in allen $x \in \Omega$ nach $x_1, \ldots, x_n$ partiell differenzierbar. Sind die Ableitungen $\partial_i f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in \Omega$ stetig, so ist f in x_0 differenzierbar.*

Beweis: Wegen Satz 1.2.5 können wir $m = 1$ annehmen. Mit Satz 1.2.1 kennen wir bereits die einzig mögliche Kandidatin für die Ableitung, und zwar

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad Ah = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(x_0) h_k.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset \Omega$, so dass

$$|\partial_k f(x) - \partial_k f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in B_\delta(x_0).$$

Für $\|h\| < \delta$ betrachten wir die Punkte $x_k = x_0 + \sum_{i=1}^{k} h_i e_i$ mit $1 \leq k \leq n$, und erhalten aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f(x_{k-1} + h_k e_k) - f(x_{k-1}) = \partial_k f(x_{k-1} + s_k h_k e_k) h_k$$

für geeignete $s_k \in [0, 1]$. Es folgt, da $\|x_{k-1} + s_k h_k e_k - x_0\| \leq \|h\| < \delta$,

$$\begin{aligned} \frac{|f(x_0 + h) - (f(x_0) + Ah)|}{\|h\|} &= \frac{1}{\|h\|} \Big| \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}) - \partial_k f(x_0) h_k) \Big| \\ &= \Big| \sum_{k=1}^{n} \Big(\partial_k f(x_{k-1} + s_k h_k e_k) - \partial_k f(x_0) \Big) \frac{h_k}{\|h\|} \Big| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \Big| \partial_k f(x_{k-1} + s_k h_k e_k) - \partial_k f(x_0) \Big| < n\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Für das Rechnen mit C^k-Funktionen gelten die folgenden Regeln. Besonders angenehm ist der Raum $C^\infty(\Omega)$, der sogar unter Differentiation abgeschlossen ist.

Korollar 1.2.1. *Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.*

(a) *Mit $f, g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ gilt $\alpha f + \beta g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

(b) *Aus $f, g \in C^k(\Omega)$ folgt $fg \in C^k(\Omega)$, sowie $f/g \in C^k(\Omega)$ falls $g \neq 0$ auf Ω.*

(c) *Sind $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$, $g \in C^k(V, \mathbb{R}^p)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f(U) \subset V$, so ist $g \circ f \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$.*

Beweis: Im Fall $k = 0$ sind die Aussagen wohlbekannt. Die Behauptungen (a) und (b) folgen nun aus den Rechenregeln für die partielle Ableitung, siehe Satz 1.1.1, mit Induktion über k. Sind zum Beispiel $f, g \in C^k(\Omega)$ für ein $k \geq 1$, so gilt induktiv $\partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g) \in C^{k-1}(\Omega)$, also $fg \in C^k(\Omega)$.

Für $k \geq 1$ sind die Abbildungen f und g aus (c) differenzierbar nach Satz 1.2.6. Dann ist $g \circ f$ ebenfalls differenzierbar wegen der Kettenregel, Satz 1.2.3, mit partiellen Ableitungen $\partial_k(g \circ f)_i = \sum_{j=1}^m (\partial_j g_i) \circ f \, \partial_k f_j$. Nun ist $(\partial_j g_i) \circ f \in C^{k-1}(U)$ nach Induktionsannahme sowie $\partial_k f_j \in C^{k-1}(U)$ nach Voraussetzung, also ist $\partial_k(g \circ f)_i \in C^{k-1}(U)$ mit der Produktregel aus (b) und folglich $g \circ f$ von der Klasse C^k. $\square$

2 Anwendungen der Differentialrechnung

2.1 Schrankensatz

Ein Grundproblem in der Analysis ist es, Informationen über die Ableitung in Eigenschaften der Funktion zu übersetzen. Für Funktionen einer Variablen, also $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, stehen uns dazu zwei Argumente zur Verfügung:

a) der Mittelwertsatz (siehe Satz 8.2.2, HM I):

$$f(b) - f(a) = f'(\tau)(b - a) \quad \text{für ein } \tau \in (a, b);$$

b) der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (siehe Satz 10.3.4, HM I):

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt.$$

Im Vergleich ist der Mittelwertsatz insofern stärker, als er mit minimalen Voraussetzungen auskommt – f muss differenzierbar in (a, b) und stetig in den Endpunkten a,b sein. Dagegen verlangt unsere Version des Hauptsatzes, dass f stetig differenzierbar auf $[a, b]$ ist. Tasächlich reicht es, wenn f stetig auf $[a, b]$ und stückweise C^1 ist, das heißt es gibt eine Zerlegung $a = t_0 < \ldots < t_N = b$, so dass $f\,|_{[t_{k-1},t_k]}$ stetig differenzierbar ist für $k = 1, \ldots, N$. Wir können dann nämlich den Hauptsatz auf jedem Teilintervall anwenden und erhalten

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{N} \big(f(t_k) - f(t_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f'(t)\, dt = \int_a^b f'(t)\, dt,$$

wobei f' in jedem der Punkte t_k einen links- und rechtsseitigen Grenzwert hat, die nicht notwendig gleich sind. Ein Nachteil des Mittelwertsatzes ist, dass er für vektorwertige Funktionen in der Regel nicht gilt, zum Beispiel ist für $f(t) = e^{it}$

$$f(2\pi) - f(0) = 0 \quad \text{aber} \quad f'(\tau) = ie^{i\tau} \neq 0 \text{ für alle } \tau \in (0, 2\pi).$$

Der Mittelwertsatz kann natürlich auf jede Komponente einzeln angewandt werden, aber die Zwischenstellen werden in der Regel verschieden sein, und dass ist unpraktisch. Im Folgenden arbeiten wir deshalb mit dem Hauptsatz, und nehmen die stärkere Voraussetzung C^1 oder stückweise C^1 in Kauf. Es stellt sich heraus, dass die C^1-Bedingung für die Anwendungen richtig ist.

Wie können diese eindimensionalen Werkzeuge nun für Funktionen mehrerer Variabler $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eingesetzt werden? Die einfache Antwort heißt: indem f längs Kurven $\gamma : [a, b] \to \Omega$, $\gamma = \gamma(t)$, ausgewertet wird.

Lemma 2.1.1. *Sei $\gamma : I = [a, b] \to \Omega$ stetig und stückweise C^1. Dann gilt für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$*

$$f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big) = \int_a^b Df\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt. \tag{2.1}$$

Beweis: Nach Korollar 1.2.1 ist die Funktion $f \circ \gamma$ stückweise C^1, und es folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel

$$f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big) = \int_a^b \frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big)\,dt = \int_a^b Df\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt.$$

□

Definition 2.1.1. *Eine Menge X heißt wegweise zusammenhängend, falls es zu je zwei Punkten x_0, $x_1 \in X$ eine stetige Abbildung $c : [0, 1] \to X$ gibt mit $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$.*

Eine solche Abbildung nennt man auch einen Weg (Englisch: *path*) von x_0 nach x_1.

Lemma 2.1.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegweise zusammenhängend. Dann gibt es einen stetigen, stückweise affinen Weg $\gamma : [0, 1] \to \Omega$, d.h. einen Polygonzug, mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$.*

Beweis: Sei $c \in C^0([0, 1], \Omega)$ mit $c(0) = x_0$ und $c(1) = x_1$ gegeben. Betrachte die Zerlegung $t_k = k/N$ für $k = 0, \ldots, N$ des Intervalls $[0, 1]$, und definiere einen Polygonzug $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t_k) = c(t_k)$ für alle k durch

$$\gamma(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}}\, c(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\, c(t_k) \qquad \text{für } t \in [t_{k-1}, t_k].$$

Wir wollen zeigen, dass dieser Polygonzug für N hinreichend groß ganz in Ω verläuft. Da $c([0, 1])$ kompakt ist und $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ abgeschlossen, gibt es ein $\varrho > 0$ mit

$$\|x - c(t)\| \geq \varrho \text{ für alle } t \in [0, 1],\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

Denn sonst gibt es Folgen $x_j \in c([0, 1])$, $y_j \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ mit $|x_j - y_j| \to 0$. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt $x_j \to x \in c([0, 1])$, und weiter $y_j \to x$, also $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, ein

Widerspruch. Da c gleichmäßig stetig auf $[0,1]$ ist, gilt

$$\operatorname{osc}(c,\delta) = \sup\{\|c(t)-c(s)\| : 0 \le s,t \le 1,\ |t-s| \le \delta\} \to 0 \quad \text{mit } \delta \to 0.$$

Daraus folgt, dass γ gleichmäßig gegen c konvergiert mit $N \to \infty$: für $t \in [0,1]$ wählen wir $k \in \{1,\dots,N\}$ mit $t \in [t_{k-1}, t_k]$ und schätzen wie folgt ab:

$$\|\gamma(t)-c(t)\| \le \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}}\|c(t_{k-1})-c(t)\| + \frac{t-t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\|c(t_k)-c(t)\| \le \operatorname{osc}(c, \frac{1}{N}) \to 0$$

mit $N \to \infty$. Für N groß ist also $\|\gamma(t)-c(t)\| < \varrho$ für alle $t \in [0,1]$, und damit $\gamma([0,1]) \subset \Omega$. □

Satz 2.1.1 (Konstanzsatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegweise zusammenhängend. Dann gilt:*

$$Df(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist konstant.}$$

Beweis: Zu $x_0, x_1 \in \Omega$ gibt es nach Lemma 2.1.2 einen Polygonzug $\gamma : [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$. Da γ stetig und stückweise C^1, folgt aus Lemma 2.1.1

$$f(x_1) - f(x_0) = \int_0^1 Df(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = 0.$$

□

Definition 2.1.2. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls folgende Implikation gilt:*

$$x_0, x_1 \in M \quad \Rightarrow \quad (1-t)x_0 + tx_1 \in M \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Satz 2.1.2 (Schrankensatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Es gebe ein $L < \infty$ mit $|Df(x)| \le L$ für alle $x \in \Omega$. Dann folgt*

$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \le L\,\|x_1 - x_0\| \quad \text{für alle } x_0, x_1 \in \Omega.$$

Beweis: Für jede stetige Funktion $\varphi : I = [a,b] \to \mathbb{R}^m$ gilt die Ungleichung

$$\Big\| \int_a^b \varphi \Big\| \le \int_a^b \|\varphi\|. \tag{2.2}$$

Dies folgt durch Anwendung der Dreiecksungleichung auf die Riemannschen Summen. Sei nun $\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx_1$ für $0 \le t \le 1$. Aus (2.1) und (1.6) folgt, da $\gamma'(t) = x_1 - x_0$,

$$\begin{aligned} \|f(x_1) - f(x_0)\| &= \Big\| \int_0^1 Df(\gamma(t))(x_1 - x_0)\,dt \Big\| \le \int_0^1 \|Df(\gamma(t))(x_1 - x_0)\|\,dt \\ &\le L\,\|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

□

Wir halten noch eine etwas andere Formulierung fest, die später zum Beispiel bei der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen benutzt wird.

Korollar 2.1.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Dann gibt es zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ eine Konstante $L < \infty$ mit*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\,\|x - y\| \quad \textit{für alle } x, y \in K.$$

Beweis: Angenommen nicht, dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ Punkte $x_k, y_k \in K$ mit

$$\|f(x_k) - f(y_k)\| > k\,\|x_k - y_k\| \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots.$$

Da $\|f\|$ stetig auf der kompakten Menge K ist, gibt es ein $M < \infty$ mit $\|f(x)\| \leq M$ für alle $x \in K$, nach Satz 7.2.1 in HM I. Weiter können wir nach Wahl einer Teilfolge und Umnummerierung annehmen, dass $x_k \to x \in K$ mit $k \to \infty$. Aber

$$\|x_k - y_k\| < \frac{1}{k}\,\|f(x_k) - f(y_k)\| \leq \frac{2M}{k} \to 0 \quad \text{mit } k \to \infty,$$

also folgt $y_k \to x$ mit $k \to \infty$. Wähle nun ein $r > 0$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$. Da $\|Df\|$ stetig ist, gibt es wieder nach Satz 7.2.1 in HM I ein $L < \infty$ mit

$$\|Df(y)\| \leq L \qquad \text{für alle } y \in \overline{B_r(x)}.$$

Für hinreichend große k gilt $x_k, y_k \in B_r(x)$, also liefert Satz 2.1.2

$$k\|x_k - y_k\| < \|f(x_k) - f(y_k)\| \leq L\|x_k - y_k\|,$$

ein Widerspruch für k hinreichend groß. □

2.2 Extremwerte

In diesem Abschnitt diskutieren wir lokale Extrema von Funktionen mehrerer Variabler, und verallgemeinern die entsprechenden notwendigen und hinreichenden Kriterien aus HM I. Dabei spielt die zweite Ableitung eine entscheidende Rolle.

Definition 2.2.1. *Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$, hat in $x \in M$ ein lokales Minimum, falls es ein $\delta > 0$ gibt mit*

$$f(y) \geq f(x) \qquad \textit{für alle } y \in B_\delta(x) \cap M.$$

Ist sogar $f(y) > f(x)$ für $y \in B_\delta(x)\backslash\{x\}$, so heißt das Minimum isoliert. Ein (isoliertes) lokales Maximum ist entsprechend definiert.

Satz 2.2.1 (notwendige Bedingung für Extrema)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ habe in $x \in \Omega$ ein lokales Extremum. Ist f differenzierbar in x, so folgt $Df(x) = 0$.*

Beweis: Für $v \in \mathbb{R}^n$ hat die Funktion $t \mapsto f(x+tv)$ ein lokales Extremum bei $t = 0$, also folgt aus der eindimensionalen Version und Satz 1.2.1

$$0 = \frac{d}{dt} f(x+tv)|_{t=0} = Df(x)v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n\,.$$

□

Definition 2.2.2. *Ein Punkt $x \in \Omega$ mit $Df(x) = 0$ heißt kritischer Punkt von f.*

Die kritischen Punkte sind mögliche Kandidaten für Extremstellen, allerdings zeigt schon das Beispiel $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, dass in kritischen Punkten nicht unbedingt ein lokales Extremum vorliegt. Um das genauer zu analysieren, müssen wir die zweite Ableitung heranziehen.

Definition 2.2.3. *Sei $f \in C^2(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die zweite Ableitung von f im Punkt $x \in \Omega$ ist die Bilinearform*

$$D^2 f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\, D^2 f(x)(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) v_i\, w_j.$$

Die zugehörige Matrix $\big(\partial_i \partial_j f(x)\big)_{1 \le i,j \le n}$ heißt Hessematrix von f an der Stelle x, und die zugehörige quadratische Form

$$v \mapsto D^2 f(x)(v,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) v_i v_j$$

heißt Hesseform von f in x.

Die Hessematrix ist symmetrisch, und $D^2 f(x)$ ist symmetrische Bilinearform. Denn nach Satz 1.1.2 gilt $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ für $f \in C^2(\Omega)$, und daraus folgt

$$D^2 f(x)(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) v_i w_j = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x) w_j v_i = D^2 f(x)(w,v).$$

Als erstes wollen wir dir Formel für die zweite Ableitung längs Kurven herleiten.

Lemma 2.2.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(\Omega)$ und $\gamma \in C^2(I, \Omega)$. Dann gilt*

$$(f \circ \gamma)''(t) = D^2 f(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t)) + Df(\gamma(t))\gamma''(t). \tag{2.1}$$

Beweis: Nach Kettenregel ist $(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(\gamma(t))\gamma_j'(t)$, und weiter

$$(f \circ \gamma)''(t) = \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(\gamma(t))\gamma_i'(t)\gamma_j'(t) + \sum_{j=1}^n \partial_j f(\gamma(t))\gamma_j''(t).$$

□

Wir benötigen nun eine lokale Entwicklung, die die zweite Ableitung mit einbezieht.

Lemma 2.2.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt*

$$\frac{f(x+h) - \big(f(x) + Df(x)h + \frac{1}{2}D^2 f(x)(h,h)\big)}{\|h\|^2} \to 0 \qquad \textit{mit } h \to 0.$$

Beweis: Wir betrachten die Funktion $\varphi(t) = f(x+th)$. Mit partieller Integration gilt

$$\varphi(1) - (\varphi(0) + \varphi'(0)) = \int_0^1 (\varphi'(t) - \varphi'(0))\, dt = \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\, dt,$$

also folgt aus Lemma 2.2.1

$$f(x+h) - \big(f(x) + Df(x)h\big) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(x+th)(h,h)\, dt. \tag{2.2}$$

Daraus ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned} f(x+h) - (f(x) &+ Df(x)h + \frac{1}{2}D^2 f(x)(h,h)) \\ &= \int_0^1 (1-t)\big(D^2 f(x+th)(h,h) - D^2 f(x)(h,h)\big)\, dt. \end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|\partial_i \partial_j f(y) - \partial_i \partial_j f(x)| < \varepsilon$ für $\|y - x\| < \delta$. Für $\|h\| < \delta$ folgt

$$\sum_{i,j=1}^n \big|\big(\partial_i \partial_j f(x+th) - \partial_i \partial_j f(x)\big) h_i h_j\big| < n^2 \|h\|^2 \varepsilon,$$

woraus sich die Behauptung ergibt. □

Als zweites Hilfsmittel brauchen wir folgende Tatsache über quadratische Formen.

Lemma 2.2.3. *Sei $b : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf dem n-dimensionalen Euklidischen Vektorraum V mit Norm $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Setze*

$$\lambda = \inf\{b(x,x) : x \in V,\ \|x\| = 1\}.$$

Dann gibt es ein $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $b(v,v) = \lambda$.

Beweis: Sei zunächst $V = \mathbb{R}^n$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = b(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j \quad \text{wobei } b_{ij} = b(e_i, e_j),$$

ist stetig auf $\mathbb{R}^n$, und $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = S^{n-1}$ ist kompakt. Die Existenz von v folgt also aus Satz 7.1.2, HM I. Für V und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ beliebig wählen wir eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von V (siehe Satz 15.3.3, HM I). Mit $T : \mathbb{R}^n \to V$, $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, gilt dann $\|T(x)\| = \|x\|$. Wir können also das Bewiesene anwenden auf die Bilinearform $\tilde{b} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\tilde{b}(x,y) = b(T(x), T(y))$. □

Definition 2.2.4. *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine symmetrische Bilinearform $b : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt positiv definit (bzw. positiv semidefinit), falls gilt:*

$$b(v,v) > 0 \quad (\text{bzw. } b(v,v) \geq 0) \quad \text{für alle } v \in V\backslash\{0\}.$$

Notation: $b > 0$ bzw. $b \geq 0$. Entsprechend für negativ (semi-)definit.

Eine Bilinearform, für die es $v, w \in V$ gibt mit $b(v,v) > 0$ und $b(w,w) < 0$ heißt *indefinit*. Ein Beispiel ist die Bilinearform $b(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ auf $\mathbb{R}^2$.

Satz 2.2.2 (Lokale Extrema)**.** *Sei $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in \Omega$.*

(a) *Wenn f in x ein lokales Minimum hat, so ist $D^2 f(x)$ positiv semidefinit.*

(b) *Ist $Df(x) = 0$ und $D^2 f(x)$ positiv definit, so hat f in x ein isoliertes lokales Minimum.*

Beweis: In (a) gilt $Df(x) = 0$ nach Satz 2.2.1. Für $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig hat $t \mapsto f(x+tv)$ bei $t = 0$ ein lokales Minimum, also folgt aus dem eindimensionalen Fall und (2.1)

$$0 \leq \frac{d^2}{dt^2} f(x+tv)|_{t=0} = D^2 f(x)(v,v).$$

Für (b) setzen wir $\lambda = \inf_{\|v\|=1} D^2 f(x)(v,v)$. Nach Lemma 2.2.3 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$, mit $D^2 f(x)(v,v) = \lambda$. Da $D^2 f(x)$ positiv definit ist, folgt insbesondere $\lambda > 0$. Sei nun für $h \neq 0$

$$R(h) = \frac{f(x+h) - \big(f(x) + \frac{1}{2} D^2 f(x)(h,h)\big)}{\|h\|^2}.$$

Nach Lemma 2.2.2 gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|R(h)| < \varepsilon$ für $\|h\| < \delta$. Es folgt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|^2} = \frac{1}{2} D^2 f(x)\Big(\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\Big) + R(h) > \frac{\lambda}{2} - \varepsilon.$$

Behauptung (b) folgt, wenn wir zum Beispiel $\varepsilon = \lambda/4$ wählen. □

Um die Funktion in der Nähe eines kritischen Punkts zu verstehen, ist der folgende Satz aus der Linearen Algebra nützlich.

Satz 2.2.3 (Hauptachsentransformation)**.** *Sei $b : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform auf dem n-dimensionalen, Euklidischen Vektorraum V. Dann existiert eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$, so dass gilt:*

$$b(v_i, v_j) = \lambda_i \, \delta_{ij} \quad \textit{für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

Beweis: Siehe Satz 15.3.3, HM I. □

In den Koordinaten $x = x_1 v_1 + \ldots x_n v_n$ bezüglich der Eigenvektorbasis hat die quadratische Form die einfache Darstellung

$$b(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \quad \text{mit } \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n.$$

Für $n = 2$ wollen wir die Mengen $M_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : b(x,x) = c\}$ beschreiben; dabei können wir nach Übergang zu $-b$ annehmen, dass $\lambda_2 > 0$ ist. Es ergeben sich drei Fälle:

$\lambda_1 > 0$: Im Nullpunkt hat $b(x,x)$ ein globales, isoliertes Minimum und für $c > 0$ ist M_c eine achsensymmetrische Ellipse mit Scheiteln in $(\pm\sqrt{c/\lambda_1}, 0)$ und $(0, \pm\sqrt{c/\lambda_2})$.

$\lambda_1 = 0$: Auch hier ist im Nullpunkt ein globales Minimum, allerdings ist M_0 die gesamte x_1-Achse; für $c > 0$ besteht M_c aus den parallelen Geraden $x_2 = \pm\sqrt{c/\lambda_2}$.

$\lambda_1 < 0$: M_0 ist Vereinigung der beiden Ursprungsgeraden $x_2 = \pm\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}\, x_1$. Für $c > 0$ ist M_c eine nach oben und unten geöffnete Hyperbel mit Scheiteln $(0, \pm\sqrt{c/\lambda_2})$ und M_0 als Asymptotenlinien. Für $c < 0$ erhalten wir ebenfalls eine Hyperbel mit Asymptoten M_0, die aber nach links und rechts geöffnet ist und die Scheitel $(\pm\sqrt{c/\lambda_1}, 0)$ hat.

Betrachten wir in den drei Fällen die zugehörigen Graphen im $\mathbb{R}^3$, so haben wir für $\lambda_1 > 0$ anschaulich eine Mulde, für $\lambda_1 = 0$ einen Hohlweg und für $\lambda_1 < 0$ einen Sattel. Aus der Mulde wird für $-b$ eine Kuppe. Es ist instruktiv, diese Beschreibung an expliziten Beispielen zu verfizieren und auch ein Bild der zugehörigen Graphen in $\mathbb{R}^3$ anzufertigen. Man nennt einen kritischen Punkt x von f nicht degeneriert, wenn die Bilinearform $D^2 f(x)$ nicht entartet ist beziehungsweise äquivalent wenn die Eigenwerte λ_i von $D^2 f(x)$ alle ungleich Null sind. In diesem Fall bezeichnet man die Anzahl der negativen Eigenwerte als den Index des kritischen Punkts. Die drei Fälle oben sind also der Reihe nach Index Null, degeneriert und Index Eins.

2.3 Taylorentwicklung

Wir wollen nun die Taylorentwicklung von Funktionen mehrerer Variabler herleiten. Im folgenden sei stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $f \in C^k(\Omega)$ definieren wir die k-te Ableitung $D^k f(x)$ an der Stelle $x \in \Omega$ als k-Linearform $D^k f(x) : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei

$$D^k f(x)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} (\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f)(x)(v_1)_{i_1} \ldots (v_k)_{i_k}. \tag{2.1}$$

Ist außerdem Ω konvex, so betrachten wir für $x_0, x \in \Omega$ die C^k-Funktion, vgl. Korollar 1.2.1,

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R},\, \varphi(t) = f(x_0 + th) \quad \text{mit } h = x - x_0.$$

Wir zeigen nun durch Induktion die Formel

$$\varphi^{(k)}(t) = D^k f(x_0 + th)(h, \ldots, h). \tag{2.2}$$

Für $k = 1$ gilt das nach Kettenregel und Satz 1.2.1, denn

$$\varphi'(t) = Df(x_0 + th)h = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x_0 + th) h_i.$$

Für $k \geq 2$ ergibt sich induktiv

$$\begin{aligned}
\varphi^{(k)}(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n} (\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_{k-1}} f)(x_0 + th)\, h_{i_1} \ldots h_{i_{k-1}} \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (\partial_i\, \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_{k-1}} f)(x_0 + th)\, h_i\, h_{i_1} \ldots h_{i_{k-1}} \\
&= D^k f(x_0 + th)(h, \ldots, h).
\end{aligned}$$

Satz 11.1.2, HM I, (Restglieddarstellung von Lagrange) angewandt auf die Funktion φ, liefert sofort eine erste Fassung der mehrdimensionalen Taylorentwicklung.

Lemma 2.3.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $f \in C^{k+1}(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es zu x_0, $x \in \Omega$ ein $\xi = (1-\tau)x_0 + \tau x$, $\tau \in [0,1]$, so dass mit $h = x - x_0$ gilt:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{D^j f(x_0)(h, \ldots, h)}{j!} + \frac{D^{k+1} f(\xi)(h, \ldots, h)}{(k+1)!}.$$

Beweis: Wir wenden auf die C^{k+1}-Funktion $\varphi(t) = f(x_0 + th)$ die eindimensionale Taylorsche Formel an, mit Entwicklungspunkt $t_0 = 0$. Nach Satz 11.1.2, HM I, gibt es ein $\tau \in [0,1]$ mit

$$\varphi(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}.$$

Einsetzen von (2.2) liefert die Behauptung. □

Die k-te Ableitung $D^k f(x)(h, \ldots, h)$ ist eine Summe von n^k Termen, von denen viele aber gleich sind wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Um dies ökonomischer zu gestalten, und vor allem um wie im Eindimensionalen eine Taylordarstellung mit Basispolynomen zu gewinnen, wird die sogenannte Multiindexnotation eingeführt. Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ setzen wir

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \quad \text{Ordnung von } \alpha, \\ \alpha! &= (\alpha_1)! \cdot \ldots \cdot (\alpha_n)! \quad \alpha\text{-Fakultät}, \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \quad \text{Monom mit Exponent } \alpha, \\ D^\alpha &= \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \quad (D^0 = \mathrm{Id}), \end{aligned}$$

Die Zahl α_ν in D^α gibt also an, wie oft nach der Koordinate x_ν zu differenzieren ist.

Satz 2.3.1 (Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $f \in C^{k+1}(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es zu x_0, $x \in \Omega$ ein $\xi = (1-\tau)x_0 + \tau x$, $\tau \in [0,1]$, so dass gilt:*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha.$$

Beweis: Die Anzahl der Tupel $(i_1, \ldots, i_k)$ in $D^k f(x_0)(h, \ldots, h)$, in denen nach jeder der Koordinaten x_ν genau α_ν-mal differenziert wird, ist

$$\binom{k}{\alpha_1} \cdot \binom{k - \alpha_1}{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \binom{k - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1})}{\alpha_n} = \frac{k!}{(\alpha_1)! \ldots (\alpha_n)!} = \frac{k!}{\alpha!}.$$

Die Behauptung folgt somit aus Lemma 2.3.1 und der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, siehe Korollar 1.1.1. □

Mit Induktion über k sieht man, die Zahl der Multindizes mit $|\alpha| = k$ ist

$$\#\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = k\} = \binom{k+n-1}{n-1} = \frac{(k+n-1) \cdot \ldots \cdot (k+1)}{(n-1)!},$$

aber das werden wir nicht verwenden. Wir stellen nur fest, dass diese Zahl für große k etwa gleich $k^{n-1}/(n-1)!$ ist, und damit viel kleiner als n^k. Eine Funktion $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad $k \geq 0$, wenn es Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_\alpha \neq 0$ für mindestens ein α der Ordnung k, so dass

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n .$$

Sei $\mathbb{P}_k$ der Raum der Polynome im $\mathbb{R}^n$ vom Grad höchstens k, und

$$F : \mathbb{P}_k \to \mathbb{R}^N,\ F(P) = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha P(x_0) e_\alpha .$$

Hier ist $N = N(n,k)$ die Anzahl der Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$, und die Standardbasis des $\mathbb{R}^N$ wird mit e_α, $|\alpha| \leq k$, nummeriert. Wegen $F\big((x-x_0)^\alpha\big) = \alpha! e_\alpha$ für $|\alpha| \leq k$ ist F surjektiv und damit aus Dimensionsgründen injektiv; die Monome $(x-x_0)^\alpha$, $|\alpha| \leq k$, bilden eine Basis von $\mathbb{P}_k$. Hieraus folgt: das k-te Taylorpolynom

$$P_k(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \tag{2.3}$$

ist das eindeutige Polynom vom Grad höchstens k mit $D^\alpha P(x_0) = D^\alpha f(x_0)$ für $|\alpha| \leq k$.

Korollar 2.3.1. *Das k-te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt x_0 eines Polynoms f vom Grad höchstens k ist f selbst.*

Beispiel 2.3.1 (Polynomialformel)**.** *Die Funktion $f(x) = (x_1 + \ldots + x_n)^k$ ist ein Polynom vom Grad k, und es gilt*

$$D^\alpha f(0) = \begin{cases} k! & \text{falls } |\alpha| = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Folgerung 2.3.1 (oder direkt durch Abzählen) ergibt sich

$$(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha .$$

Die Approximationseigenschaft des Taylorpolynoms gilt auch ganz analog.

Satz 2.3.2 (Approximation durch das Taylorpolynom im $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei $f \in C^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}_0$, und P_k das k-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \Omega$. Dann gilt:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_k(x)}{\|x - x_0\|^k} = 0.$$

Beweis: Nach Satz 2.3.1, mit k statt $k+1$, gibt es zu $x \in \Omega$ ein ξ zwischen x_0 und x mit

$$f(x) - P_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha.$$

Da $D^\alpha f$ stetig und $\|(x - x_0)^\alpha\| \leq \|x - x_0\|^k$, ist die Konvergenz gegen Null gezeigt. $\square$

2.4 Parameterabhängige Integrale

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels behandlen wir als Anwendung der partiellen Ableitung parameterabhängige Integrale. Sei dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Für eine gegebene Funktion $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, betrachten wir die neue Funktion

$$\phi : \Omega \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \int_I f(x, y)\, dy. \tag{2.4}$$

Diese Funktion wird als parameterabhängiges Integral bezeichnet, wobei die Parameter hier die Punkte $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ sind. Damit ϕ wohldefiniert ist, müssen die Integrale existieren, also sollte für jedes $x \in \Omega$ die Funktion $f(x, \cdot) : I \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$, Riemann-integrierbar sein. Wir interessieren uns für die Stetigkeit und Ableitung der Funktion $\phi(x)$. Dabei werden wir benutzen, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig sind, vgl. Satz 10.2.1, HM I.

Satz 2.4.1 (Stetigkeit von Parameterintegralen)**.** *Sei $f \in C^0(\Omega \times I)$, $f = f(x, y)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a, b]$ kompakt. Dann ist die Funktion*

$$\phi : \Omega \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \int_I f(x, y)\, dy,$$

wohldefiniert und stetig.

Beweis: Die Funktion ist wohldefiniert, denn für $x \in \Omega$ ist $f(x, \cdot) \in C^0(I)$, also Riemann-integrierbar. Zu $x \in \Omega$ gibt es ein $\delta_0 > 0$ mit $K := \{x' \in \mathbb{R}^n : \|x' - x\| \leq \delta_0\} \subset \Omega$. Da $K \times I$ kompakt, ist $f : K \times I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, insbesondere gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, \delta_0]$, so dass für alle $y \in I$ gilt:

$$|f(x', y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad \text{für } \|x' - x\| < \delta.$$

Wir erhalten für $\|x' - x\| < \delta$ die Abschätzung

$$|\phi(x') - \phi(x)| \leq \int_I |f(x', y) - f(x, y)|\, dy < \varepsilon.$$

$\square$

Wir gehen direkt weiter zur Differenzierbarkeit und Berechnung der Ableitung.

Satz 2.4.2 (Differentiation unter dem Integral)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a,b]$. Für $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ mit $f(x,\cdot) \in C^0(I)$ für alle $x \in \Omega$ setze $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = \int_I f(x,y)\,dy$. Ist $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^0(\Omega \times I)$ für ein $j \in \{1,\ldots,n\}$, so folgt*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\,dy.$$

Sind f und $\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ in $C^0(\Omega \times I)$, so ist $\phi \in C^1(\Omega)$.

Beweis: Zu $x \in \Omega$ wähle $\delta_0 > 0$, so dass $K = \{x' \in \mathbb{R}^n : \|x' - x\| \leq \delta_0\} \subset \Omega$. Da $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ gleichmäßig stetig auf $K \times I$ ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0,\delta_0]$, so dass für alle $y \in I$ gilt:

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x',y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\Big| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{für } \|x' - x\| < \delta.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\frac{f(x+he_j,y) - f(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{ds} f(x+she_j,y)\,ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+she_j,y)\,ds.$$

Für $h \in [-\delta,\delta]$ und $s \in [0,1]$ ist $|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+she_j,y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)| < \varepsilon/(b-a)$, also

$$\begin{aligned}
|\frac{\phi(x+he_j) - \phi(x)}{h} &- \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\,dy| \\
&= \Big|\int_I \Big(\frac{f(x+he_j,y) - f(x,y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\Big)\,dy\Big| \\
&= \Big|\int_I \int_0^1 (\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+she_j,y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y))\,dsdy\Big| \\
&\leq \int_I \int_0^1 \Big|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+she_j,y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\Big|\,dsdy \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist die Differentiationsregel gezeigt. Die Zusatzaussage folgt nun aus Satz 2.4.1. $\square$

Beispiel: Wir berechnen hier das Integral der Gaußschen Dichtefunktion (das früher auf 10-Mark-Scheinen zu finden war)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Wir betrachten die Funktion

$$F : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ F(x) = \Big(\int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \Big)^2,$$

und berechnen mit dem Hauptsatz und anschließender Substitution $\xi = xy$, also $d\xi = xdy$,

$$F'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi = \int_0^1 2xe^{-(1+y^2)x^2}\, dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy,$$

wobei $f(x, y) = -e^{-(1+y^2)x^2}/(1 + y^2)$. Da f auf $(0, \infty) \times [0, 1]$ glatt ist, können wir nach Satz 2.4.2 den Operator $\frac{\partial}{\partial x}$ herausziehen, und mit $\phi(x) = \int_0^1 f(x, y)\, dy$ folgt

$$\phi'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy = F'(x).$$

Nun gilt $F(0) - \phi(0) = \int_0^1 (1 + y^2)^{-1}\, dy = \arctan 1 = \pi/4$, also $F(x) = \phi(x) + \pi/4$ für alle $x \in [0, \infty)$. Aber $|\phi(x)| \le e^{-x^2} \to 0$ mit $x \to \infty$, und so

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \lim_{x\to\infty} \sqrt{F(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3 Kurvenintegrale

3.1 Kurvenintegral von Vektorfeldern

Wir kehren hier zur eindimensionalen Analysis zurück und interessieren uns zunächst für Kurven im $\mathbb{R}^n$. Man bezeichnet jede stetige Abbildung eines Intervalls in den $\mathbb{R}^n$ als Kurve. Dies hört sich zunächst vernünftig an, allerdings lässt die Forderung der Stetigkeit noch Abbildungen zu, die anschaulich weit entfernt davon sind, eine Kurve zu sein. So hat G. Peano 1905 stetige Kurven konstruiert, die das Intervall $[0,1]$ surjektiv auf die Fläche eines Dreiecks abbilden. Wir sollten also lieber etwas mehr verlangen als nur Stetigkeit.

Definition 3.1.1 (C^1-Kurve)**.** *Ist $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, I Intervall, so heißt γ C^1-Kurve im $\mathbb{R}^n$.*

Beispiel: Für $p, v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ ist $\gamma(t) = p + tv$ eine parametrisierte Gerade. Der Fall $v = 0$ ist jedoch durch Definition 3.1.1 nicht ausgeschlossen. Die Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \quad \text{mit } r > 0,$$

durchläuft den Kreis vom Radius r um den Nullpunkt unendlich oft. Durch Hinzufügen einer dritten Komponente entsteht die Schraubenlinie

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, at) \quad \text{für } a > 0.$$

Bei einem Umlauf wächst die dritte Komponente um die Höhe $2\pi a$. Das Bild der Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$$

sieht aus wie eine etwas deformierte Acht.

Definition 3.1.2 (Bogenlänge)**.** *Die Bogenlänge einer Kurve $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $I = [a,b]$, ist*

$$L(\gamma) = \int_I \|\gamma'\|.$$

Eigentlich müsste diese Formel durch Approximation von γ mit Polygonzügen, deren Länge elementar definiert ist, begründet werden. Für eine Zerlegung $a = t_0 < \ldots <$

$t_N = b$ sollte näherungsweise gelten:

$$\sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{N} \Big\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\, dt \Big\| \approx \sum_{i=1}^{N} \|\gamma'(t_i)\| \Delta t_i \approx \int_I \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Wir verzichten aber hier darauf, dieses Argument rigoros zu machen.

Beispiel: Die Länge von $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, at)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, ist

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|(-r\sin t, r\cos t, a)\|\, dt = 2\pi\sqrt{r^2 + a^2}.$$

Die Schraubenlinie verläuft auf dem Mantel des Zylinders $x^2 + y^2 = r^2$, und man kann das Ergebnis durch Abrollen des Zylinders mit dem Satz des Pythagoras bestätigen.

Anschaulich besteht eine Kurve aus ihrem Bild im $\mathbb{R}^n$ und einem Fahrplan, wie dieses Bild durchlaufen werden soll. In der Physik spielt der Fahrplan eine wesentliche Rolle, zum Beispiel für unsere Jahreszeiten. Die Bogenlänge ist jedoch eine geometrische Größe, und sollte nicht vom Fahrplan abhängen. Das soll nun präzisiert werden.

Definition 3.1.3 (Umparametrisierung)**.** *Seien $\gamma_{1,2} : I_{1,2} \to \mathbb{R}^n$ parametrisierte Kurven. Dann heißt γ_2 Umparametrisierung von γ_1, falls eine Bijektion $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ mit $\varphi' \neq 0$ existiert, so dass $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.*

Die Bijektion φ nennt man auch Parametertransformation. An dieser Stelle ergibt sich die Frage, warum wir die Bedingung $\varphi' \neq 0$ verlangen. Eine Antwort ist, dass wir jedenfalls die Differenzierbarkeit der Parametertransformationen verlangen wollen, außerdem sollte die Sache symmetrisch bezüglich γ_1 und γ_2 sein. Die Bedingung $\varphi' \neq 0$ ist aber äquivalent dazu, dass die inverse Parametertransformation φ^{-1} differenzierbar ist. Tatsächlich ist die Relation $\gamma_1 \sim \gamma_2$, falls γ_2 Umparametrisierung von γ_1, eine Äquivalenzrelation.

Lemma 3.1.1 (Invarianz der Bogenlänge)**.** *Sind $\gamma_{1,2} \in C^1(I_{1,2}, \mathbb{R}^n)$ und ist γ_2 eine Umparametrisierung von γ_1, so folgt $L(\gamma_2) = L(\gamma_1)$.*

Beweis: Sei $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ für $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ mit $\varphi' \neq 0$. Dann folgt je nach Vorzeichen von φ'

$$\|\gamma_2'(t)\| = \|\gamma_1'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| = \pm \|\gamma_1'(\varphi(t))\| \varphi'(t),$$

also liefert die Substitution $s = \varphi(t)$ für $I_1 = [a_1, b_1]$ sowie $I_2 = [a_2, b_2]$

$$L(\gamma_2) = \int_{a_2}^{b_2} \|\gamma_2'(t)\|\, dt = \pm \int_{a_2}^{b_2} \|\gamma_1'(\varphi(t)\|\, \varphi'(t)\, dt = \pm \int_{\varphi(a_2)}^{\varphi(b_2)} \|\gamma_1'(s)\|\, ds = L(\gamma_1).$$

$\square$

Es ist eine naheliegende Frage, ob für eine gegebene Kurve eine besonders schöne Umparametrisierung existiert. Was dabei besonders schön sein soll, sagt folgende Definition.

Definition 3.1.4 (Parametrisierung nach der Bogenlänge). *Eine Kurve $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn gilt:*

$$\|\gamma'(s)\| = 1 \quad \text{für alle } s \in I.$$

Physikalisch betrachtet wird eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Absolutgeschwindigkeit Eins durchlaufen. Geometrisch folgt für jedes Teilintervall $[a,b] \subset I$

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \|\gamma'(s)\|\, ds = (b-a),$$

das heißt das Intervall wird durch γ längentreu abgebildet.

Satz 3.1.1 (Parametrisierung nach der Bogenlänge). *Sei $\gamma \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ eine Kurve mit Länge $L = L(\gamma)$. Es gelte $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Dann gibt es eine C^1-Bijektion $\varphi : [0,L] \to [a,b]$ mit $\varphi' > 0$, so dass $c = \gamma \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Beweis: Wir betrachten die Bogenlängenfunktion

$$\sigma : [a,b] \to [0,L],\ \sigma(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau. \tag{3.1}$$

Es gilt $\sigma'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ nach Voraussetzung, also ist σ eine Bijektion der Klasse C^1. Bezeichnet $\varphi : [0,L] \to [a,b]$ die Umkehrfunktion, so folgt

$$\|(\gamma \circ \varphi)'(s)\| = \|\gamma'(\varphi(s))\|\, \varphi'(s) = \|\gamma'(\varphi(s))\| \, \frac{1}{\sigma'(\varphi(s))} = 1.$$

$\square$

Eine Kurve γ mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle t nennt man regulär (oder immergiert). Verzichtet man auf die Bedingung der Regularität, so kann das Bild sogar einer C^∞-Kurve Singularitäten aufweisen. Ein Beispiel ist die Neilsche Parabel $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. Das Bild $\gamma(\mathbb{R}) = \{(x, \pm x^{3/2}) : x \in \mathbb{R}\}$ hat eine Spitze im Nullpunkt. Die Regularität einer Kurve bleibt unter Umparametrisierungen erhalten, denn es gilt $(\gamma \circ \varphi)' = (\gamma' \circ \varphi)\varphi'$ mit $\varphi' \neq 0$ nach Definition. Insbesondere kann auf die Voraussetzung $\gamma' \neq 0$ in Satz 3.1.1 nicht verzichtet werden.

Ist der Endpunkt einer Kurve der Anfangspunkt einer zweiten Kurve, so ist es naheliegend, diese zu einer Kurve zusammenzusetzen. Im allgemeinen wird das Ergebnis dann keine C^1-Kurve mehr sein. Auch stückweise lineare Kurven sind in der Regel nicht C^1. Es ist daher praktisch, als Verallgemeinerung stückweise C^1-Kurven einzuführen.

Definition 3.1.5 (stückweise C^1). *Eine Kurve $\gamma \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ heißt stückweise C^1, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ gibt, so dass mit $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ gilt:*

$$\gamma|_{I_k} \in C^1(I_k,\mathbb{R}^n) \quad \text{für alle } k = 1,\ldots,N.$$

Notation: $\gamma \in PC^1(I,\mathbb{R}^n)$ (piecewise continuously differentiable).

In den Unterteilungspunkten existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $\gamma'_\pm(t_i)$, die jedoch nicht übereinstimmen müssen. Setzen wir willkürlich $\gamma'(t_i) = 0$, so ist die Funktion $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stückweise stetig, insbesondere ist $|\gamma'| : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Die Bogenlänge ist also auch für $\gamma \in PC^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ durch Definition 3.1.2 erklärt. Insbesondere hängt die Länge nicht von der Wahl der Unterteilung ab.

Im Folgenden bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stets das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.1.6. *Ist $F \in C^0(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\gamma \in PC^1([a,b],\Omega)$, so heißt*

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt$$

das Kurvenintegral von F längs c.

In der Physik ist zum Beispiel F das Gravitationsfeld, und das Kurvenintegral ergibt die Arbeit, die beim Transport einer Masse längs einer Kurve innerhalb des Feldes verrichtet wird. Dabei wird $\vec{dx}$ als vektorielles Längenelement interpretiert, und der Punkt $\cdot$ bedeutet das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Wir haben diese Notation übernommen, obwohl sie für uns rein symbolisch ist, das heißt $\vec{dx}$ hat keine eigene mathematische Bedeutung, ähnlich wie beim Riemannintegral. Das Kurvenintegral ist allein durch die rechte Seite in Definition 3.1.6 erklärt. Allerdings ist die Merkregel, dass $\vec{dx}$ durch $\gamma'(t)\,dt$ zu ersetzen ist, hilfreich.

Beispiel: Das Gravitationsfeld der Sonne ist gegeben durch

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3,\; F(x) = -C\frac{x}{\|x\|^3} \quad \text{mit } C > 0.$$

Beispiel: (Winkelvektorfeld)

Wir betrachten hier das Vektorfeld

$$W : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2,\ W(x,y) = \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \Big).$$

Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\gamma(t) = r(t)\big(\cos\theta(t), \sin\theta(t)\big)$ mit $r, \theta \in C^1(I)$, so folgt

$$\int_\gamma W \cdot \vec{dx} = \int_a^b \left\langle \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ cos\theta \end{pmatrix}, r' \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + r\theta' \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\rangle dt = \theta(b) - \theta(a). \tag{3.2}$$

Also liefert das Kurvenintegral von W die Differenz der Polarwinkel von Endpunkt und Anfangspunkt der Kurve.

Eine Parametertransformation $\varphi : I_2 \to I_1$ heißt orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend), wenn $\varphi' > 0$ (bzw. $\varphi' < 0$) ist. Anschaulich wird bei Umparametrisierung mit einer orientierungsumkehrenden Parametertransformation die Kurve umgekehrt durchlaufen, Anfangs- und Endpunkt tauschen ihre Rollen. Während die Bogenlänge unter allen Umparametrisierungen invariant ist, ist das Kurvenintegral nur bei orientierungserhaltenden Umparametrisierungen invariant, bei orientierungsumkehrenden Umparametrisierungen wechselt es sein Vorzeichen. Dies wird sogleich gezeigt.

Lemma 3.1.2. *Das Kurvenintegral hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Linearität: sind $F_{1,2} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$ und $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, so gilt für $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$*

$$\int_\gamma (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) \cdot \vec{dx} = \lambda_1 \int_\gamma F_1 \cdot \vec{dx} + \lambda_2 \int_\gamma F_2 \cdot \vec{dx}.$$

(b) *Additivität bei Zerlegungen: ist $\gamma \in PC^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ und $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$, so folgt mit $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$*

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} F \cdot \vec{dx}.$$

(c) *Invarianz bei Umparametrisierungen: sei $\gamma \in PC^1(I_1, \mathbb{R}^2)$ und $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ eine Parametertransformation. Dann gilt, je nach Vorzeichen von φ',*

$$\int_{\gamma\circ\varphi} F \cdot \vec{dx} = \pm \int_\gamma F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: (a) und (b) folgen aus der Definition und den Eigenschaften des Riemannintegrals. Für (c) sei $I_1 = [a_1, b_1]$ und $I_2 = [a_2, b_2]$. Mit der Substitution $\varphi(t) = s$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\varphi} F\cdot\vec{dx} &= \int_{a_2}^{b_2}\langle (F\circ\gamma\circ\varphi)(t),(\gamma\circ\varphi)'(t)\rangle\,dt\\ &= \int_{a_2}^{b_2}\langle F\circ\gamma(\varphi(t)),\gamma'(\varphi(t))\rangle\varphi'(t)\,dt\\ &= \int_{\varphi(a_2)}^{\varphi(b_2)}\langle (F\circ\gamma)(s),\gamma'(s))\rangle ds.\end{aligned}$$

Ist φ orientierungserhaltend, so gilt $\varphi(a_2)=a_1$ und $\varphi(b_2)=b_1$ und wir bekommen das Kurvenintegral. Ist φ orientierungsumkehrend, so sind die Grenzen vertauscht und wir bekommen das negative Kurvenintegral. □

Wir benötigen wie beim Riemann-Integral eine Standardabschätzung des Kurvenintegrals.

Lemma 3.1.3. *Sei $F\in C^0(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, und $\gamma\in PC^1(I,\Omega)$ mit $I=[a,b]$. Dann gilt mit $\|F\circ\gamma\|_\infty := \sup_{t\in I}\|F(\gamma(t))\|$*

$$\left\|\int_\gamma F\cdot\vec{dx}\right\| \le \|F\circ\gamma\|_\infty\, L(\gamma).$$

Beweis: Aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und der Standardabschätzung des Riemann-Integrals folgt

$$\begin{aligned}\left\|\int_a^b\langle F(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle\,dt\right\| &\le \int_a^b\|\langle F(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle\|\,dt\\ &\le \int_a^b\|F(\gamma(t))\|\,\|\gamma'(t)\|\,dt\\ &\le \|F\circ\gamma\|_\infty\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt\\ &= \|F\circ\gamma\|_\infty\, L(\gamma).\end{aligned}$$

□

Die Physiker nennen das Gravitationsfeld konservativ, weil der Energieerhaltungssatz gilt. Der Begriff des konservativen Feldes ist auch in der Mathematik interessant.

Definition 3.1.7. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $F\in C^0(\Omega,\mathbb{R}^n)$ heißt Gradientenfeld (bzw. konservativ), wenn es eine Funktion $\varphi\in C^1(\Omega)$ gibt mit $\nabla\varphi=F$. Die Funktion φ heißt Stammfunktion (bzw. Potential) von F.*

Lemma 3.1.4 (Eindeutigkeit der Stammfunktion)**.** *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wegweise zusammenhängend, so ist eine Stammfunktion von $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ eindeutig bestimmt, bis auf eine additive Konstante.*

Beweis: Sind $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\Omega)$ Stammfunktionen von F, so folgt

$$\nabla(\varphi_2 - \varphi_1) = \nabla\varphi_2 - \nabla\varphi_1 = F - F = 0,$$

also ist $\varphi_2 - \varphi_1$ konstant nach Satz 2.1.1, das heißt $\varphi_2 = \varphi_1 + c$. □

Wir werden jetzt sehen, dass die Existenz einer Stammfunktion gleichbedeutend damit ist, dass das Kurvenintegral für Kurven mit gleichem Anfangs- und Endpunkt stets denselben Wert hat. Zuvor eine Definition.

Definition 3.1.8. *Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Aus $\gamma(a) = \gamma(b)$ folgt nicht notwendig $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, zum Beispiel ist im Fall der Acht aus dem Beispiel vom Beginn dieses Abschnitts $\gamma(\pi/2) = \gamma(3\pi/2) = (0, 0)$, während $\gamma'(\pi/2) = (-1, -2) \neq (1, -2) = \gamma'(3\pi/2)$. Anschaulich schneidet sich die Kurve hier mit einem Winkel.

Satz 3.1.2 (Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegweise zusammenhängend. Für ein Vektorfeld $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *F ist ein Gradientenfeld.*

(b) *Für jede geschlossene Kurve $\gamma \in PC^1([a, b], \Omega)$ ist $\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = 0$.*

(c) *Für je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a, b], \Omega)$ mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ gilt*
$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: Ist $F = \nabla\,\varphi$ mit $\varphi \in C^1(\Omega)$, so folgt für $\gamma \in PC^1([a, b], \Omega)$ geschlossen

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \int_a^b \langle \nabla\varphi(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt = \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t)\, dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = 0.$$

Für $\gamma_{0,1} \in PC^1([a, b], \Omega)$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ist die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & a \leq t \leq b \\ \gamma_1(2b - t) & b \leq t \leq 2b - a \end{cases}$$

geschlossen und stückweise C^1, und aus (b) ergibt sich mit Lemma 3.1.2

$$0 = \int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} - \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Für (c) $\Rightarrow$ (a) sei $x_0 \in \Omega$ fest. Zu $x \in \Omega$ wählen wir eine Kurve $\gamma_x \in PC^1([0,1], \Omega)$ mit $\gamma_x(0) = x_0$ und $\gamma_x(1) = x$, und setzen

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot \vec{dx}.$$

Die Existenz von γ_x ist gesichert nach Lemma 2.1.2, genauer können wir γ_x stückweise linear wählen. Nach Voraussetzung (c) hängt das Kurvenintegral nicht von der Wahl von γ_x ab. Daher ist die Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ wohldefiniert. Sei nun $x \in \Omega$. Für $|h|$ klein erhalten wir eine Kurve von x_0 nach $x + he_j$, indem wir γ_x mit der Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $c(t) = x + the_j$, zusammensetzen. Es folgt

$$\frac{\varphi(x+he_j) - \varphi(x)}{h} = \int_c F \cdot \vec{dx} = \int_0^1 \langle F(x+the_j), e_j \rangle \, dt \to F_j(x) \qquad \text{mit } h \to 0.$$

Also gilt $\partial_j \varphi = F_j$ für $j = 1, \ldots, n$. □

Die zentrale Frage dieses Kapitels ist: wie können wir entscheiden, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld ist? Für C^1-Vektorfelder gibt es eine notwendige Bedingung, die offensichtlich ist.

Satz 3.1.3 (Rotationsfreiheit von Gradientenfeldern)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Gradientenfeld, so gilt für alle $i, j = 1, \ldots, n$*

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i \qquad \textit{in } \Omega.$$

Beweis: Ist $F = \nabla \varphi$, so folgt $\varphi \in C^2(\Omega)$ und wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, Satz 1.1.2, gilt

$$\partial_i F_j = \partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi = \partial_j F_i.$$

□

Bemerkung: Für $n = 3$ lässt sich die Bedingung schreiben als $\operatorname{rot} F = 0$, wobei

$$\operatorname{rot} F = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1).$$

Beispiel: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (-y, x)$, hat keine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^2$, denn

$$\partial_1 F_2 = 1, \text{ aber } \partial_2 F_1 = -1.$$

Beispiel: Für das Winkelvektorfeld

$$W : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2,\, W(x,y) = \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \Big)$$

berechnen wir

$$\partial_1 W_2 = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_2 W_1,$$

das heißt die notwendige Bedingung aus Satz 3.1.3 ist erfüllt. Dennoch ist das Kurvenintegral nicht wegunabhängig: für $k \in \mathbb{Z}$ und $r > 0$ ist die Kurve $\gamma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\gamma_k(t) = r(\cos kt, \sin kt)$, geschlossen und es gilt nach dem ersten Beispiel zum Winkelvektorfeld

$$\int_{\gamma_k} W \cdot \vec{dx} = 2\pi k \quad (\neq 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}).$$

Im Unterschied zum vorangegangenen Beispiel besitzt das Vektorfeld W allerdings zumindest lokal Stammfunktionen. Zum Beispiel ist

$$\varphi : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \to \mathbb{R},\, \varphi(x,y) = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

eine Stammfunktion von W auf der oberen Halbebene; analog hat man Stammfunktionen auch auf der unteren, rechten und linken Halbebene.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich das Kurvenintegral längs einer Schar von Kurven ändert. Statt Schar verwenden wir den moderneren Ausdruck Homotopie. Dies ist ein fundamentales Konzept der Analysis.

Definition 3.1.9 (Homotopie)**.** *Eine Homotopie in Ω zwischen Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([a,b], \Omega)$ ist eine Abbildung $\gamma \in C^0([a,b] \times [0,1], \Omega)$ mit*

$$\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0 \quad \textit{und} \quad \gamma(\cdot, 1) = \gamma_1.$$

Gilt $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = p$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = q$, und gibt es eine Homotopie mit $\gamma(a,t) = p$, $\gamma(b,t) = q$ für alle $t \in [0,1]$, so heißen γ_0, γ_1 homotop in Ω mit festen Endpunkten. Gilt $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$, $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$, und gibt es eine Homotopie mit $\gamma(a,t) = \gamma(b,t)$ für alle $t \in [0,1]$, so heißen γ_0, γ_1 in Ω geschlossen homotop.

Es gilt folgende allgemeine Formel für die Änderung des Kurvenintegrals unter (hinreichend glatten) Homotopien.

Lemma 3.1.5 (Homotopieformel)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann* *gilt für* $\gamma \in C^1([a,b] \times [0,1], \Omega)$, *falls* $\partial_s \partial_t \gamma \in C^0([a,b] \times [0,1], \mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma(\cdot,1)} F \cdot \vec{dx} - \int_{\gamma(\cdot,0)} F \cdot \vec{dx} \;&=\; \int_{\gamma(b,\cdot)} F \cdot \vec{dx} - \int_{\gamma(a,\cdot)} F \cdot \vec{dx} \\ &\quad + \int_0^1 \int_a^b \Big(\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle \\ &\quad - \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle \Big)\, ds dt.\end{aligned}$$

Gilt $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ *für* $i,j = 1,\ldots,n$, *und hat die Homotopie feste Endpunkte oder ist geschlossen, so ist die rechte Seite Null.*

Beweis: Nach Zusatz zum Satz von Schwarz, Satz 1.1.2, gilt $\partial_t \partial_s \gamma = \partial_s \partial_t \gamma$. Wir berechnen mit Satz 2.4.2 und partieller Integration bezüglich $s \in [a,b]$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_{\gamma(\cdot,t)} F \cdot \vec{dx} \;&=\; \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \langle F(\gamma(s,t)), \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s,t) \rangle\, ds \\ &= \int_a^b \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle\, ds + \int_a^b \langle F \circ \gamma, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s} \rangle\, ds \\ &= \int_a^b \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle\, ds + \langle F \circ \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle \Big|_{s=a}^{s=b} \\ &\quad - \int_a^b \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle\, ds.\end{aligned}$$

Integration bezüglich t ergibt die Formel. Ist $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ oder mit anderen Worten DF symmetrisch, so verschwindet das Doppelintegral. Bei festen Endpunkten sind $\gamma(\cdot,a)$ und $\gamma(\cdot,b)$ konstant, also die zugehörigen Kurvenintegrale Null. Ist die Homotopie geschlossen, so gilt $\gamma(\cdot,a) = \gamma(\cdot,b)$ und die Kurvenintegrale rechts heben sich gegenseitig weg. □

Lemma 3.1.6 (affine Homotopie)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *mit* $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ *für* $i,j = 1,\ldots,n$. *Für Kurven* $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a,b], \Omega)$ *betrachte die affine Homotopie*

$$\gamma : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma(s,t) = (1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s).$$

Haben γ_0, γ_1 *gleiche Endpunkte oder sind geschlossen, und gilt* $\gamma([a,b] \times [0,1]) \subset \Omega$, *so folgt*

$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: Sind $\gamma_0, \gamma_1 \in C^1([a,b], \Omega)$, so folgt die Aussage direkt aus Lemma 3.1.5. Für γ_0, γ_1 stückweise C^1 zerlegen wir $[a,b]$ in Teilintervalle, auf denen beide Kurven C^1 sind, und wenden Lemma 3.1.5 auf den Teilintervallen an. Die Randintegrale heben sich bei Addition heraus. □

Satz 3.1.4 (Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf Ω für $1 \leq i, j \leq n$. Sind dann $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a,b], \Omega)$ homotop in Ω mit festen Endpunkten (oder geschlossen homotop), so gilt*

$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: Ist die Homotopie hinreichend glatt, so folgt die Aussage aus Lemma 3.1.5. Es geht also um das technische Problem, dass die gegebene Homotopie $\gamma \in C^0([a,b] \times [0,1], \Omega)$ eventuell nur stetig ist.

Aus Kompaktheitsgründen gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_{2\varepsilon}(p) \subset \Omega$ für alle $p \in \gamma([a,b] \times [0,1])$, vgl. Lemma 2.1.1. Da γ auf der kompakten Menge $[a,b] \times [0,1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es weiter ein $\delta > 0$ mit

$$\|\gamma(s_0, t) - \gamma(s_1, t)\|, \ \|\gamma(s, t_0) - \gamma(s, t_1)\| < \varepsilon \quad \text{für } |s_0 - s_1|, \ |t_0 - t_1| < \delta.$$

Wir ersetzen jetzt $\gamma(\cdot, t)$ durch stückweise lineare Kurven. Für $N \in \mathbb{N}$ mit $(b-a)/N < \delta$ und $s_k = a + k(b-a)/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$, definieren wir $\tilde{\gamma} : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{\gamma}(s,t) = \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}} \gamma(s_{k-1}, t) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} \gamma(s_k, t) \quad \text{für } s \in [s_{k-1}, s_k].$$

Es gilt $\tilde{\gamma}(a,t) = \gamma(a,t)$, $\tilde{\gamma}(b,t) = \gamma(b,t)$ für alle $t \in [0,1]$. Für $s \in [s_{k-1}, s_k]$ haben wir

$$\begin{aligned} &\|\tilde{\gamma}(s,t) - \gamma(s,t)\| \\ &\quad = \Big\| \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}} \big(\gamma(s_{k-1}, t) - \gamma(s,t)\big) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} \big(\gamma(s_k, t) - \gamma(s,t)\big) \Big\| \\ &\quad < \varepsilon. \end{aligned}$$

Für $\lambda \in [0,1]$ folgt $\big\|(1-\lambda)\gamma(s,t) + \lambda\tilde{\gamma}(s,t)\big) - \gamma(s,t)\big\| \leq \|\tilde{\gamma}(s,t) - \gamma(s,t)\| < \varepsilon$, das heißt die affine Homotopie zwischen $\gamma(\cdot, t)$ und $\tilde{\gamma}(\cdot, t)$ liegt in Ω. Insbesondere folgt aus Lemma 3.1.6

$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot, 0)} F \cdot \vec{dx} \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot, 1)} F \cdot \vec{dx}. \tag{3.3}$$

Weiter gilt für $|t_0 - t_1| < \delta$ und $s \in [s_{k-1}, s_k]$

$$\begin{aligned} &\|\tilde{\gamma}(s, t_0) - \tilde{\gamma}(s, t_1)\| \\ &= \Big\| \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}} \big(\gamma(s_{k-1}, t_0) - \gamma(s_{k-1}, t_1)\big) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} \big(\gamma(s_k, t_0) - \gamma(s_k, t_1)\big) \Big\| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

und es folgt für alle $\lambda \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\|((1-\lambda)\tilde{\gamma}(s,t_0)+\lambda\tilde{\gamma}(s,t_1))-\gamma(s,t_0)\| \leq& \|\tilde{\gamma}(s,t_1)-\tilde{\gamma}(s,t_0)\| \\ &+\|\tilde{\gamma}(s,t_0)-\gamma(s,t_0)\| \\ <& 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Für $1/N < \delta$ folgt mit $t_l = l/N$ für $l = 0,1,\dots,N$ aus Lemma 3.1.6

$$\int_{\tilde{\gamma}(\cdot,t_l)} F \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,t_{l-1})} F \cdot \vec{dx} \quad \text{für } l = 1,\dots,N,$$

und Kombination mit (3.3) beweist den Satz. □

Definition 3.1.10. *Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([a,b],\Omega)$ in Ω geschlossen homotop zu einer konstanten Kurve ist.*

Beispiel: Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es ein $x_0 \in \Omega$ gibt mit

$$(1-t)x + tx_0 \in \Omega \quad \text{für alle } x \in \Omega,\ t \in [0,1].$$

Eine sternförmige Menge ist einfach zusammenhängend, denn jede geschlossene Kurve $\gamma_0 \in C^0([a,b],\Omega)$ ist homotop zur konstanten Kurve in x_0, nämlich durch die Homotopie

$$\gamma : [a,b] \times [0,1] \to \Omega,\ \gamma(s,t) = (1-t)\gamma_0(s) + tx_0.$$

Satz 3.1.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und einfach zusammenhänged. Dann sind für ein Vektorfeld $F \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ *für* $i,j = 1,\dots,n$.

(b) *F hat eine Stammfunktion.*

Beweis: Aus (a) folgt mit Satz 3.1.4 für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in PC^1([a,b],\Omega)$

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = 0.$$

Hieraus ergibt sich mit Satz 3.1.2 die Existenz einer Stammfunktion. Die umgekehrte Implikation wurde schon in Satz 3.1.3 festgestellt. □

Beispiel: Ein Spezialfall von Satz 3.1.5 ist das Lemma von Poincaré: ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und $F \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ rotationsfrei, so besitzt F eine Stammfunktion φ.

Tatsächlich kann diese explizit angegeben werden: Integration längs $\gamma_x(t) = (1 - t)x_0 + tx$, $t \in [0,1]$, ergibt

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot \vec{dx} = \int_0^1 \langle F((1-t)x_0 + tx, x - x_0\rangle \, dt.$$

Wir fassen unsere Resultate über Kurvenintegrale in einer kleinen Tabelle zusammen:

$$\begin{array}{ccc}
F \text{ Gradientenfeld} & \overset{\text{Satz 3.1.2}}{\Longleftrightarrow} & \int F \cdot \vec{dx} \text{ wegunabhängig} \\
\Downarrow \text{Satz 3.1.3} & \Uparrow \text{1-fach zshg. Satz 3.1.5} \Uparrow & \Downarrow \\
\partial_i F_j = \partial_j F_i & \overset{\text{Satz 3.1.4}}{\Longleftrightarrow} & \int F \cdot \vec{dx} \text{ homotopieinvariant}
\end{array}$$

Zu begründen ist noch die Implikation von rechts nach links in der unteren Zeile. Ist das Kurvenintegral homotopieinvariant, so ist es auf einer Umgebung $B_\varrho(x) \subset \Omega$ aber wegunabhängig. Also hat das Vektorfeld auf $B_\varrho(x)$ eine Stammfunktion, und es folgt $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf $B_\varrho(x)$.

3.2 Kurvenintegral von 1-Formen

Wir wollen hier im zweiten Abschnitt des Kapitels eine alternative Notation für Kurvenintegrale einführen, die auf lange Sicht das überlegene Konzept ist. Wir brauchen dazu den Raum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ aller Linearformen auf $\mathbb{R}^n$, mit anderen Worten den Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$.

Definition 3.2.1 (1-Form)**.** *Eine Abbildung $\alpha : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ heißt Differentialform vom Grad Eins oder kurz 1-Form (oder auch Kovektorfeld) auf Ω.*

Für $f \in C^1(\Omega)$ ist die Ableitung df (die wir in diesem Kontext mit einem kleinen d statt einem großen D schreiben) eine 1-Form, das sogenannte Differential von f:

$$df : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*, \, df(x)v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) v_j.$$

Speziell bezeichnet man die Differentiale der n Koordinatenfunktionen $x \mapsto x_i$ auf

$\mathbb{R}^n$ mit $dx_i : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$. Es gilt also

$$dx_i(x)v = v_i, \qquad \text{insbesondere } dx_i(x)e_j = \delta_{ij}.$$

Da $dx_i(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gleich ist, das heißt die Abbildung $dx_i : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ ist konstant, wird die Variable x meistens weggelassen und stattdessen ein Punkt geschrieben, also $dx_i(x)v = dx_i \cdot v$. Jede 1-Form auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat nun eine eindeutige Darstellung

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i \quad \text{ mit } \alpha_i : \Omega \to \mathbb{R},\, \alpha_i(x) = \alpha(x)e_i.$$

Dies folgt sofort, wenn wir an der Stelle $x \in \Omega$ beide Seiten auf die Basis $e_1, \ldots, e_n$ anwenden. Die $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind die Koordinatenfunktionen von α. Für das Differential einer Funktion gilt beispielweise

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i.$$

Eine Form $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i$ auf Ω ist von der Klasse C^k, falls $\alpha_i \in C^k(\Omega)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Definition 3.2.2 (Kurvenintegral von 1-Formen)**.** *Sei α eine stetige 1-Form auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Für $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$ setzen wir*

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Das Standardskalarprodukt erlaubt es, jedem Vektorfeld eine 1-Form bijektiv zuzuordnen, und zwar definiert man für das Vektorfeld $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ die 1-Form $\alpha : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ durch

$$\alpha(x)v = \langle A(x), v\rangle \quad \text{ für } x \in \Omega,\, v \in \mathbb{R}^n\,.$$

Dann haben A und α die gleichen Koordinatenfunktionen, denn es ist

$$\alpha_i(x) = \alpha(x)e_i = \langle A(x), e_i\rangle = A_i(x);$$

Insbesondere ist die Gleichung $A = \operatorname{grad}\varphi$ äquivalent zu $\alpha = d\varphi$. Etwas abstrakter ergibt sich das auch aus der Charakterisierung des Gradienten in Gleichung (1.5), Kapitel 1:

$$A = \nabla\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \langle A(x), v\rangle = d\varphi(x)v \text{ für alle } x \in \Omega,\, v \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = d\varphi.$$

Nach Definition von α gilt weiter $\alpha(\gamma(t))\gamma'(t) = \langle A(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$, und damit

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma A \cdot \vec{dx}.$$

Es wird folgende Terminologie eingeführt.

Definition 3.2.3. *Eine* 1*-Form* α *auf der offenen Menge* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *heißt*

(a) *exakt, wenn es eine Funktion* $\varphi \in C^1(\Omega)$ *gibt mit* $\alpha = d\varphi$,

(b) *geschlossen, wenn* $\alpha \in C^1$ *und* $\partial_i \alpha_j = \partial_j \alpha_i$ *auf* Ω *für* $i, j = 1, \ldots, n$.

Ist α dem Vektorfeld A zugeordnet, so ist demnach α genau dann exakt, wenn A ein Gradientenfeld ist, und genau dann geschlossen, wenn A rotationsfrei ist. Wir können somit alle unsere Resultate in der Sprache der 1-Formen neu forumulieren:

- genau dann ist α exakt, wenn das Kurvenintegral wegunabhängig ist;
- ist α exakt, so auch geschlossen;
- ist α geschlossen, so ist das Kurvenintegral homotopieinvariant;
- auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist jede geschlossene 1-Form exakt.

Der Vorteil der 1-Formen gegenüber den anschaulicheren Vektorfeldern liegt nun im Transformationsverhalten. Seien dazu $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, und $\phi \in C^1(U, V)$. Ist ω eine 1-Form auf V, so erhalten wir eine 1-Form $\phi^*\omega$ auf U, den pullback von ω unter ϕ, durch die Formel

$$(\phi^*\omega)(x)v = \omega(\phi(x))D\phi(x)v \quad \text{für } x \in U,\, v \in \mathbb{R}^n.$$

Sind dy_i die Koordinatendifferentiale auf $\mathbb{R}^m$, so berechnen wir

$$(\phi^* dy_i)(x)v = dy_i \cdot D\phi(x)v = d\phi_i(x)v$$

beziehungsweise kurz $\phi^* dy_i = d\phi_i$ für $i = 1, \ldots, m$, und allgemeiner

$$\phi^*\omega = \sum_{i=1}^m (\omega_i \circ \phi) d\phi_i \quad \text{mit} \quad d\phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Ist $\phi \in C^{k+1}$ und $\omega \in C^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$, so ist demnach $\phi^*\omega \in C^k$.

Satz 3.2.1 (Transformation des Kurvenintegrals)**.** *Seien* $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ *offen* *und* $\phi \in C^1(U, V)$. *Für eine stetige* 1-*Form* ω *auf* V *und* $\gamma \in PC^1([a, b], U)$ *gilt*

$$\int_{\phi\circ\gamma} \omega = \int_\gamma \phi^*\omega.$$

Beweis. Aus den Definitionen ergibt sich

$$\int_{\phi\circ\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\phi(\gamma(t)))D\phi(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (\phi^*\omega)(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma \phi^*\omega.$$

□

Das Kurvenintegral von Vektorfeldern benutzt wesentlich das Skalarprodukt, was bei der Analyse des Transformationsverhaltens mit berücksichtigt werden müsste. Bei der Umrechnung des Laplaceoperators auf krummlinige Koordinaten wird uns so etwas noch begegnen.

4 Lokale Auflösung von Gleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Wir interessieren uns für die Lösbarkeit einer nichtlinearen Gleichung $f(x) = y$ zu gegebener rechter Seite $y \in \mathbb{R}^m$. Genauer wollen wir die lokale Lösbarkeit betrachten, das heißt wir setzen voraus, dass eine Lösung der Gleichung $f(x_0) = y_0$ gegeben ist, und stellen uns die folgenden Fragen:

(1) Hat die Gleichung $f(x) = y$ zu jedem y nahe bei y_0 eine Lösung x nahe bei x_0?

(2) Ist x_0 die einzige Lösung von $f(x) = y_0$ in einer Umgebung von x_0?

(3) Falls nicht, wie sieht die Lösungsmenge $f^{-1}\{y_0\}$ nahe bei x_0 aus?

Betrachten wir zunächst den Fall, dass f affin-linear ist. Wegen $f(x_0) = y_0$ hat f dann die Form $f(x) = y_0 + A(x - x_0)$ mit einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und es gilt

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) = y - y_0.$$

In diesem Fall liefert die Lineare Algebra sogar globale Antworten:

(1) Es gibt eine Lösung für alle $y \in \mathbb{R}^m \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang} A = m$.

(2) Es gibt höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Kern}(A) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang} A = n$.

(3) $f^{-1}\{y_0\} = x_0 + \operatorname{Kern}(A)$ ist ein affiner Unterraum der Dimension $n - \operatorname{rang} A$.

Sei nun $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ beliebig, und $R_f(\xi) = f(x_0 + \xi) - \big(f(x_0) + Df(x_0)\xi\big)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ hinreichend klein. Ist $f(x_0) = y_0$, so folgt mit $A = Df(x_0)$

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + R_f(x - x_0) = y - y_0.$$

Wir hoffen, dass sich der nichtlineare Term $R_f(x - x_0)$ als Störung der linearen Gleichung behandeln lässt, so dass sich die Aussagen (1), (2) und (3) geeignet übertragen lassen.

4.1 Diffeomorphismen

Definition 4.1.1. *Eine Abbildung $f : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ heißt Diffeomorphismus der Klasse C^r, wobei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} sind r-mal stetig differenzierbar.*

Beispiel: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Ist $f \in C^1(I)$ mit $f' > 0$ auf ganz I (bzw. $f' < 0$ auf ganz I), so ist $J := f(I)$ ein offenes Intervall und $f : I \to J$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dies ergibt sich aus Folgendem:

- $f : I \to J$ ist bijektiv, da streng monoton wachsend. Nach dem Zwischenwertsatz, genauer Satz 6.3.6, HM I, ist J wieder ein offenes Intervall.
- Die Umkehrabbildung $g = f^{-1}$ ist differenzierbar mit $g' = 1/(f' \circ g)$, insbesondere ist g von der Klasse C^1, vgl. Satz 7.1.14, HM I.

Umgekehrt: ist $f : I \to f(I)$ ein C^1-Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $g : f(I) \to I$, so ergibt die Kettenregel

$$g(f(x)) = x \quad \Rightarrow \quad g'(f(x))f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \neq 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gilt entweder $f' > 0$ auf ganz I oder $f' < 0$ auf ganz I. Insbesondere ist f streng monoton.

Zum Beispiel ist die Abbildung $f : (-1, 1) \to (-1, 1)$, $f(x) = x^3$, zwar bijektiv, genauer streng monoton wachsend, und von der Klasse C^1, aber sie ist kein C^1-Diffeomorphismus, denn es gilt $f'(0) = 0$. Die Umkehrabbildung

$$g : (-1,1) \to (-1,1),\ g(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{für } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

ist im Punkt $y = 0$ nicht differenzierbar.

Beispiel: Sei $U = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$. Die Polarkoordinatenabbildung

$$f : U \to V,\ f(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta),$$

ist ein Diffeomorphismus der Klasse C^∞. Prüfen Sie nach, dass die Umkehrabbildung

$g : V \to U$ wie folgt gegeben ist:

$$g(x,y) = \begin{cases} (\sqrt{x^2+y^2}, \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{für } y \geq 0 \\ (\sqrt{x^2+y^2}, 2\pi - \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Die Funktion arccos ist unendlich oft differenzierbar auf dem Intervall $(-1, 1)$, also ist g unendlich oft differenzierbar für $y \in V$, $y \neq 0$. Aber für $x < 0$ gilt alternativ die Formel

$$g(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}).$$

Somit ist in der Tat $g \in C^\infty(V, U)$.

Lemma 4.1.1 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $f : U \to V$ sei bijektiv mit Umkehrabbildung $g : V \to U$. Sind f in x_0 und g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, so ist die lineare Abbildung $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ invertierbar, insbesondere ist $m = n$, und es gilt $Dg(y_0) = Df(x_0)^{-1}$.*

Beweis: Aus $g\big(f(x)\big) = x$ und $f\big(g(y)\big) = y$ folgt mit der Kettenregel

$$Dg(y_0)Df(x_0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \quad Df(x_0)Dg(y_0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}.$$

Also ist $Df(x_0)$ injektiv und surjektiv, das heißt invertierbar, und die Dimensionsformel impliziert $m = n$. □

Bekanntlich heißt $\det Df(x_0)$ Jacobideterminante von f in x_0. In der Situation von Lemma 4.1.1 folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz

$$\det Dg(y_0) \det Df(x_0) = 1 \qquad \text{für } y_0 = f(x_0). \tag{4.1}$$

Lemma 4.1.2 (Höhere Ableitungen der Umkehrfunktion)**.** *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ bijektiv. Ist $f \in C^r(U, V)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und ist die Umkehrabbildung $g : V \to U$ differenzierbar, so ist auch $g \in C^r(V, U)$.*

Beweis: Nach Lemma 4.1.1 gilt $Dg = (Df)^{-1} \circ g$. Die Cramersche Regel für die Berechnung der inversen Matrix impliziert

$$\frac{\partial g_j}{\partial y_i} = (-1)^{i+j} \frac{M_{ij}\,(Df)}{\det(Df)} \circ g. \tag{4.2}$$

Dabei bezeichnet $M_{ij}(Df)$ die Determinante der Matrix, die aus Df durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht, siehe Satz 14.1.6, HM I. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $r \in \mathbb{N}$. Da g nach Voraussetzung differenzierbar und somit stetig ist, vgl. Satz 1.2.2, ist für $f \in C^1$ die rechte Seite in (4.2) stetig als Produkt, Quotient und Verkettung stetiger Funktionen, und damit $g \in C^1$. Ist $f \in C^r$ und induktiv schon $g \in C^{r-1}$, so ist die rechte Seite von der Klasse C^{r-1} als Produkt, Quotient und Verkettung von C^{r-1}-Funktionen, siehe Korollar 1.2.1, und damit $g \in C^r$, was zu zeigen war. □

Nach diesen Vorüberlegungen wollen wir nun die Frage der Existenz einer Lösung angehen. Dazu die folgenden Definitionen.

Definition 4.1.2. *Eine Folge x_k, $k \in \mathbb{N}$, in einem metrischen Raum (X, d) (d.h. ein Raum X mit einer Metrik d) heißt Cauchyfolge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ gibt mit*

$$d(x_k, x_l) < \varepsilon \quad \text{für alle } k, l > N.$$

Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge x_k in X konvergiert, das heißt es gibt ein $x \in X$ mit $d(x, x_k) \to 0$ mit $k \to \infty$.

Natürlich ist $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Abstandsfunktion ein vollständiger metrischer Raum. Aber jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist mit dem euklidischen Abstand auch ein vollständiger metrischer Raum, denn eine Cauchyfolge $x_k \in A$ ist auch Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$ und konvergiert damit gegen ein $x \in \mathbb{R}^n$, und es gilt $x \in A$ wegen A abgeschlossen.

Satz 4.1.1 (Fixpunktsatz von Banach)**.** *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und $F : X \to X$ eine Kontraktion, das heißt es gibt ein $\theta \in [0, 1)$ mit*

$$d(F(x), F(y)) \leq \theta\, d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X. \tag{4.3}$$

Dann gibt es genau ein $x \in X$ mit $F(x) = x$.

Beweis: Die Eindeutigkeit ist klar, denn aus $F(x) = x$ und $F(y) = y$ folgt

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq \theta\, d(x, y) \quad \Rightarrow \quad d(x, y) = 0, \text{ also } x = y.$$

Um den Fixpunkt zu konstruieren, betrachten wir die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = F(x_n)$ mit beliebigem Startwert $x_0 \in X$. Es folgt aus (4.3) für $n \geq 1$

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \theta\, d(x_n, x_{n-1}). \tag{4.4}$$

Wir können uns einen müder werdenden Frosch vorstellen, dessen Sprünge jedes Mal um ein Faktor $\theta \in [0, 1)$ kürzer werden. Wie weit kann der Frosch insgesamt kommen? Es folgt per Induktion aus (4.4)

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta^n\, d(x_1, x_0) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.5}$$

und hieraus weiter mit der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_0) \leq \sum_{j=0}^{n-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \theta^j \, d(x_1, x_0) \leq \frac{1}{1-\theta} \, d(x_1, x_0).$$

Indem wir x_n statt x_0 als Startwert auffassen, haben wir für $m > n$

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{1-\theta} \, d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} \, d(x_1, x_0). \tag{4.6}$$

Also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge, und konvergiert nach Voraussetzung gegen ein $x \in X$. Da F nach Voraussetzung Lipschitzstetig ist (mit Konstante θ), folgt

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x,$$

und die Existenz des Fixpunkts ist gezeigt. □

Wir bemerken, dass wir a priori abschätzen können, wie weit die Iteration im n-ten Schritt noch vom gesuchten Fixpunkt entfernt ist, und zwar folgt mit $m \to \infty$ aus (4.6)

$$d(x, x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} \, d(x_1, x_0).$$

Satz 4.1.2 (über inverse Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ist die lineare Abbildung $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar, so gibt es eine offene Umgebung U von x_0, so dass gilt:*

(a) *$V = f(U)$ ist offene Umgebung von $y_0 = f(x_0)$*

(b) *$f : U \to V$ ist Diffeomorphismus der Klasse C^1.*

Zusatz. Ist $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist $g = (f|_U)^{-1} \in C^r(V, \mathbb{R}^n)$.

Beweis: Wir können $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ annehmen, andernfalls betrachten wir die Abbildung

$$\tilde{f} : \tilde{\Omega} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : x_0 + \xi \in \Omega\} \to \mathbb{R}^n, \; \tilde{f}(\xi) = f(x_0 + \xi) - f(x_0).$$

Schritt 1 *Formulierung als Fixpunktproblem*
Mit $A := Df(0)$ und $R_f(x) := f(x) - Ax$ können wir die Gleichung wie folgt umformen:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad Ax + R_f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}(y - R_f(x)).$$

Für $y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir also $\phi_y : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\phi_y(x) = A^{-1}(y - R_f(x))$, und erhalten

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \phi_y(x) = x. \tag{4.7}$$

Schritt 2 *Konstruktion der Lösung*
Wir bestimmen $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass für jedes $y \in B_\varepsilon(0)$ die Abbildung $\phi_y : \overline{B_\delta(0)} \to \overline{B_\delta(0)}$ eine Kontraktion ist. Setze $\Lambda = |A^{-1}| \in (0, \infty)$. Nach Voraussetzung ist $DR_f(x) = Df(x) - A$ stetig mit $DR_f(0) = 0$, folglich gibt es ein $\delta_0 > 0$ mit

$$\overline{B_{\delta_0}(0)} \subset \Omega \quad \text{und} \quad |DR_f(x)| \leq \frac{1}{2\Lambda} \quad \text{für } |x| \leq \delta_0.$$

Aus dem Schrankensatz, siehe Satz 2.1.2, folgt

$$\|x_1\|, \|x_2\| \leq \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \|R_f(x_1) - R_f(x_2)\| \leq \frac{1}{2\Lambda} \|x_1 - x_2\|. \tag{4.8}$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} \|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\| &= \|A^{-1}(y - R_f(x_1)) - A^{-1}(y - R_f(x_2))\| \\ &= \|A^{-1}(R_f(x_1) - R_f(x_2))\| \\ &\leq \Lambda \|R_f(x_1) - R_f(x_2)\|. \end{aligned}$$

Also folgt aus (4.8) die Kontraktionseigenschaft

$$\|x_1\|, \|x_2\| \leq \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|. \tag{4.9}$$

Bisher ist $y \in \mathbb{R}^n$ noch beliebig. Wir schätzen weiter ab

$$\begin{aligned} \|\phi_y(x)\| &= \|A^{-1}(y - R_f(x))\| \\ &\leq |A^{-1}| \, (\|y\| + \|R_f(x)\|) \\ &= \Lambda(\|y\| + \|R_f(x) - R_f(0)\|) \quad (\text{ da } R_f(0) = 0) \\ &\leq \Lambda\|y\| + \frac{1}{2}\|x\| \quad \text{für } \|x\| \leq \delta_0 \text{ nach (4.8).} \end{aligned}$$

Also folgt für $\delta \in (0, \delta_0]$, wenn wir $\varepsilon = \delta/(2\Lambda) > 0$ wählen,

$$\|x\| \leq \delta, \, \|y\| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|\phi_y(x)\| < \Lambda\varepsilon + \frac{1}{2}\delta = \delta. \tag{4.10}$$

Wegen (4.10) und (4.9) ist $\phi_y : \overline{B_\delta(0)} \to \overline{B_\delta(0)}$ eine wohldefinierte Kontraktion mit Konstante $\theta = 1/2$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es zu jedem $y \in B_\varepsilon(0)$ genau ein $x \in \overline{B_\delta(0)}$ mit $\phi_y(x) = x$, das heißt $f(x) = y$ nach (4.7). Tatsächlich ist $x \in B_\delta(0)$, denn nach (4.10) gilt $\|x\| = \|\phi_y(x)\| < \delta$. Die Mengen $V = B_\varepsilon(0)$ und $U = f^{-1}(V) \cap B_\delta(0)$ sind offene Umgebungen des Nullpunkts, siehe Satz 6.1.2 HM

I, für die Offenheit von U, und wie gezeigt ist $f: U \to V$ bijektiv. Insbesondere ist Behauptung (a) bewiesen.

Schritt 3 *Differenzierbarkeit der inversen Abbildung*
Sei $g: V \to U$ die Umkehrabbildung von $f: U \to V$. Dann gilt

$$\|g(y)\| = \|\phi_y(g(y))\| \leq \Lambda\|y\| + \frac{1}{2}\|g(y)\| \quad \Rightarrow \quad \|g(y)\| \leq 2\Lambda\|y\|. \tag{4.11}$$

Insbesondere ist g stetig im Nullpunkt mit $g(0) = 0$. Wir zeigen nun $Dg(0) = A^{-1}$. Für $y \neq 0$ ist $g(y) \neq 0$ und es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{\|g(y) - A^{-1}y\|}{\|y\|} = \frac{\|\phi_y(g(y)) - A^{-1}y\|}{\|y\|} &= \frac{\|A^{-1}(R_f(g(y)))\|}{\|y\|} \\ &\leq \Lambda \frac{\|R_f(g(y))\|}{\|g(y)\|} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|}. \end{aligned}$$

Mit $y \to 0$ geht die rechte Seite aber gegen Null, denn $\|g(y)\|/\|y\| \leq 2\Lambda$ nach (4.11) und $\|R_f(x)\|/\|x\| \to 0$ mit $x = g(y) \to 0$. Damit ist ist $Dg(0) = A^{-1}$ gezeigt. Um die Differenzierbarkeit für alle $y \in V$ zu bekommen, wählen wir $\delta > 0$ so klein, dass $\det Df(x) \neq 0$ für alle $x \in B_\delta(0)$. Ist dann $y \in V$, so sind die Voraussetzungen des Satzes im Punkt $x = g(y)$ erfüllt, und es folgt aus dem Bewiesenen $Dg(y) = Df(x)^{-1}$.

Lemma 4.1.2 liefert schließlich $g \in C^1(V, U)$. Ist $f \in C^r(U, V)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist $g \in C^r(V, U)$, ebenfalls nach Lemma 4.1.2. $\square$

Als unmittelbare Konsequenz des Satzes halten wir fest:

Korollar 4.1.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ist $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in \Omega$, so ist $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

Beweis: Nach Satz 4.1.2 hat jeder Punkt $y \in f(\Omega)$ eine offene Umgebung $V \subset f(\Omega)$. $\square$

Beispiel: Wie wir in obigem Beispiel gesehen haben, bildet eine eindimensionale Funktion $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $f' \neq 0$ das gesamte Definitionsintervall diffeomorph auf das Bildintervall ab, das heißt es gilt eine globale Version des Umkehrsatzes. Das folgende Beispiel zeigt, dass eine entsprechende Aussage für Funktionen mehrerer Variabler im allgemeinen nicht wahr ist. In reellen Koordinaten $z = x + iy$ lautet die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \exp(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Es gilt $\exp(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Die Jacobideterminante von exp ist nirgends Null, genauer gilt

$$D\exp(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det D\exp(x,y) = e^{2x} \neq 0.$$

Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, denn es ist $\exp(x, y + 2k\pi) = \exp(x,y)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

4.2 Implizite Funktionen

Wir betrachten jetzt den Fall eines unterbestimmten Systems, wenn es also weniger Gleichungen gibt als Unbekannte. Wir können die Funktion dann wie folgt schreiben, indem wir die Variablen in zwei Gruppen einteilen:

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^k, \quad f = f(x,y), \quad \text{wobei } (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n\,.$$

Gegeben sei eine Lösung (x_0, y_0) der Gleichung $f(x,y) = z_0$. Wir interessieren uns dafür, wie die Lösungsmenge dieser Gleichung nahe bei (x_0, y_0) aussieht. Können wir nach y auflösen, d. h. die Lösungsmenge als Graph einer Funktion $y = g(x)$ darstellen?

Beispiel: Betrachte die Gleichung

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = 1 \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

Sei eine Lösung $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gegeben, also ein Punkt auf dem Einheitskreis. Ist $y_0 > 0$, so ist die Lösungsmenge nahe bei (x_0, y_0) Graph der Funktion $y = \sqrt{1 - x^2}$. Analog haben wir im Fall $y_0 < 0$ die lokale Graphendarstellung $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Dagegen ist die Lösungsmenge in keiner Umgebung von $(1, 0)$ (und ebenso in keiner Umgebung von $(-1, 0)$) als Graph über der x-Achse darstellbar, denn es gibt die zwei Lösungen $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Es kann auch vorkommen, dass (x_0, y_0) der einzige Punkt mit $f(x_0, y_0) = z_0$ ist, z.B. löst nur der Nullpunkt die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ in $\mathbb{R}^2$.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ linear. Wir unterteilen die $k \times (m + k)$-Matrix von f in eine $k \times m$-Matrix A und eine $k \times k$-Matrix B, d. h.

$$f(x,y) = Ax + By \quad \text{mit } A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k, \quad B : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \quad \text{linear.}$$

Die Gleichung $Ax + By = z_0$ hat zu festem $x \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutige Auflösung nach y

dann und nur dann, wenn B invertierbar ist. Ist das der Fall, so lautet die Auflösung $y = B^{-1}(z_0 - Ax)$.

Allgemein schreiben wir die Jacobimatrix von $f = f(x, y)$ in der Form

$$Df(x, y) = (D_x f,\, D_y f) \in (\mathbb{R}^{k \times m},\, \mathbb{R}^{k \times k}).$$

Wenn wir nach $y = g(x)$ auflösen wollen, so sollte nach Beispiel **??** die Ableitung $D_y f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertierbar sein. In den Anwendungen ist die Einteilung in die beiden Variablengruppen nicht immer vorgegeben, das heißt es könnte nach verschiedenen Gruppen von je k Variablen aufgelöst werden. So kann der Einheitskreis in einer Umgebung von $(1, 0)$ zwar nicht als Graph $y = g(x)$ geschrieben werden, wohl aber als Graph $x = g(y)$, und außer in den vier Punkten $\pm e_1, \pm e_2$ könnte sowohl nach x als auch nach y aufgelöst werden.

Merkregel. Die Ableitung nach den Variablen, nach denen aufgelöst werden soll, muss invertierbar sein. Im Spezialfall $k = 1$ bedeutet das $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Satz 4.2.1 (über implizite Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Ist $f(x_0, y_0) = z_0$ und ist die lineare Abbildung $D_y f(x_0, y_0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ invertierbar, so gibt es offene Umgebungen U von x_0 bzw. V von y_0 sowie eine Funktion $g \in C^1(U, V)$ mit*

$$\{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = z_0\} = \{(x, g(x)) : x \in U\}, \tag{4.12}$$

insbesondere ist $g(x_0) = y_0$. Die Funktion g hat die Ableitung

$$Dg(x_0) = -\big(D_y f(x_0, y_0)\big)^{-1} D_x f(x_0, y_0). \tag{4.13}$$

Zusatz. Für jedes $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gilt die Implikation

$$f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k) \quad \Rightarrow \quad g \in C^r(U, \mathbb{R}^k).$$

Beweis: Wir verwenden einen Trick, um den Satz über inverse Funktionen anwenden zu können, und zwar betrachten wir $F : \Omega \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, $F(x, y) = \big(x, f(x, y)\big)$. Es gilt

$$DF = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_m & 0 \\ D_x f & D_y f \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{m \times m} & \mathbb{R}^{m \times k} \\ \mathbb{R}^{k \times m} & \mathbb{R}^{k \times k} \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\det DF(x_0, y_0) = \det D_y f(x_0, y_0) \neq 0$ nach Voraussetzung. Nach dem Umkehrsatz existieren offene Umgebungen $U_0 \times V$ von (x_0, y_0) sowie W von (x_0, z_0), so dass $F : U_0 \times V \to W$ diffeomorph ist. Wir bezeichnen die zugehörige Umkehrabbildung mit $G \in C^1(W, U_0 \times V)$. Ist $(x, z) \in W$, also $(x, z) = (x, f(x, y))$ mit

$(x, y) \in U_0 \times V$ nach Konstruktion, so folgt

$$G(x, z) = G(x, f(x, y)) = G(F(x, y)) = (x, y).$$

Also ist G von der Form $G(x, z) = (x, g_0(x, z))$ mit $g_0 \in C^1(W, \mathbb{R}^k)$. Sei nun $U = \{x \in U_0 : (x, z_0) \in W\}$. Da W offen in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, ist U offen in $\mathbb{R}^m$ und für $(x, y) \in U \times V$ gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) = z_0 \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y) &= (x, z_0) \\ \Leftrightarrow \quad (x,y) &= G(x, z_0) \quad (\text{da } (x, z_0) \in W) \\ \Leftrightarrow \quad y &= g_0(x, z_0). \end{aligned}$$

Also gilt die Aussage des Satzes mit $g(x) = g(x, z_0)$. Die Formel für die Ableitung folgt aus der Kettenregel:

$$f(x, g(x)) = z_0 \quad \Rightarrow \quad D_x f(x_0, y_0) + D_y f(x_0, y_0)\, Dg(x_0) = 0.$$

$\square$

Beispiel: Wir wollen als triviales Beispiel untersuchen, wie die Nullstelle eines quadratischen Polynoms von seinen Koeffizienten abhängt. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(p, q, \lambda) = \lambda^2 + 2p\,\lambda + q = (\lambda + p)^2 - (p^2 - q).$$

Die Menge $N = \{(p, q, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : f(p, q, \lambda) = 0\}$ ist die Vereinigung der beiden disjunkten Graphen $G^\pm = \{(p, q, \lambda^\pm(p, q)) : p^2 > q\}$, wobei $\lambda^\pm(p, q) = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$, mit der Menge $\overline{G}^+ \cap \overline{G}^- = \{(p, q, \lambda) : p^2 = q,\ \lambda = -p\}$. Im Fall

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(p_0, q_0, \lambda_0) = 2(\lambda_0 + p_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_0^2 - q_0 > 0$$

liegt (p_0, q_0, λ_0) in einem der beiden Graphen G^+ oder G^-, und N ist in einer Umgebung $U \times V$ als Graph von λ^+ oder λ^- darstellbar. Ist dagegen

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(p_0, q_0, \lambda_0) = 2(\lambda_0 + p_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_0^2 - q_0 = 0,$$

so macht der implizite Funktionensatz keine Aussage. Tatsächlich lässt sich die Menge N in keiner Umgebung von (p_0, q_0, λ_0) als Graph $\lambda = \lambda(p, q)$ darstellen: für $p^2 < q$ hat die Gleichung überhaupt keine Lösung, für $p^2 = q$ genau eine und für $p^2 > q$ die zwei verschiedenen Lösungen $\lambda^\pm(p, q)$.

Beispiel: Betrachte jetzt $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(b, \lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_0$. Sei λ_0 eine einfache Nullstelle von $f(a, \lambda)$ für $a \in \mathbb{R}^n$ fest, das heißt es gilt

$$f(a, \lambda) = (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda) \quad \text{für ein Polynom } q(\lambda) \text{ mit } q(\lambda_0) \neq 0.$$

Es folgt $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(a,\lambda_0) = q(\lambda_0) \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine Umgebung $U \times V$ von (a,λ_0), so dass zu jedem $b \in U$ genau eine Nullstelle $\lambda(b) \in V$ von $f(b,\cdot\,)$ existiert. Diese hängt unendlich oft differenzierbar von b ab, und es gilt für $0 \leq i \leq n-1$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial b_i}(a) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial \lambda}(a,\lambda_0)\Big)^{-1}\frac{\partial f}{\partial b_i}(a,\lambda_0) = -\frac{\lambda_0^i}{n\,\lambda_0^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}\,\lambda_0^{n-2} + \ldots + a_1}.$$

Wir kommen nun zu einer geometrischen Anwendung des Satzes über implizite Funktionen. Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ und $z_0 \in \mathbb{R}$, so kann im allgemeinen die Niveaumenge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = z_0\}$$

Punkte enthalten, in denen M nicht lokal wie eine Linie aussieht, z.B. Kreuzungspunkte von Linien oder isolierte Punkte. Ist aber $Df(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in M$, so ist M nach dem impliziten Funktionensatz in der Nähe jedes Punkts als C^1-Graph über der x-Achse oder der y-Achse darstellbar und damit wirklich eine Höhenlinie im strengen Sinn des Worts. Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die lokal aussehen wie ein Unterraum, heißen Untermannigfaltigkeiten.

Definition 4.2.1. *Sei $1 \leq m \leq n$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Klasse C^r, wobei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls gilt: zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^r-Diffeomorphismus $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ mit*

$$\phi(M \cap \Omega) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \phi(\Omega).$$

Wir nennen den Diffeomorphismus ϕ eine (lokale) Plättung von M. Im Einzelfall kann der Nachweis, dass eine gegebene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit ist, anhand der Definition mühevoll sein. Für Mengen, die als Niveaumengen einer Funktion gegeben sind, liefert jedoch der Satz über implizite Funktionen folgendes Kriterium.

Satz 4.2.2 (Untermannigfaltigkeitskriterien)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $m + k = n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *M ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^r.*

(2) Niveaumengenkriterium: *Zu $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$, so dass $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ und $\operatorname{rang} Df = k$ auf Ω.*

(3) Graphenkriterium: *Zu $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$*

und $g \in C^r(U,V)$, so dass nach geeigneter Permutation der Koordinaten gilt:

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

Beweis: Wir zeigen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Es gelte (1), das heißt zu jedem $p \in M$ gibt es eine lokale Plättung $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ der Klasse C^r mit $p \in \Omega$. Sei $\pi^\perp : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Dann folgt mit $f = \pi^\perp \circ \phi$ für $q \in \Omega$

$$f(q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(q) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad q \in \phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = M \cap \Omega.$$

Außerdem gilt $\operatorname{rang} Df = \operatorname{rang}(\pi^\perp \circ D\phi) = k$ und $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

Ist (2) erfüllt, so ist nach evtl. Permutation der Koordinaten $D_y f(p)$ invertierbar, wobei $(x,y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, und (3) folgt aus dem Satz über implizite Funktionen.

Für (3) $\Rightarrow$ (1) können wir annehmen, dass die Graphendarstellung ohne Permuation der Koordinaten gilt. Wir setzen $\Omega = U \times V$ und

$$\phi : \Omega \to \phi(\Omega),\ \phi(x,y) = (x, y - g(x)).$$

Dann ist $\phi \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ injektiv und es gilt

$$D\phi(x,y) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -Dg(x) & E_k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det D\phi(x,y) = 1 \quad \text{für alle } (x,y) \in \Omega.$$

Also ist $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ ein Diffeomorphismus der Klasse C^r nach dem Umkehrsatz. Da $(x,y) \in M \cap \Omega$ genau wenn $y = g(x)$, also $\phi(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$, ist die in (1) verlangte lokale Plättung gefunden. $\square$

Beispiel: Die Sphäre $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 1\}$ ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{m+1}$ der Klasse C^∞. Denn es gilt

$$S^m = f^{-1}(0) \ \text{ für } \ f : \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|^2 - 1,$$

und $Df(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$. Die Behauptung folgt also aus Satz 4.2.2.

Beispiel: Die Oberfläche eines Ellipsoids mit Halbachsen $a, b, c > 0$ ist gegeben durch

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

Es gilt $M = f^{-1}\{0\}$ mit $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, insbesondere

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = 2\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right) \neq 0 \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}.$$

Definition 4.2.2. *Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heisst Tangentialvektor von $M \subset \mathbb{R}^n$ m Punkt $p \in M$, falls es eine Abbildung $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ gibt mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Die Menge der Tangentialvektoren von M im Punkt p wird mit T_pM bezeichnet.*

Korollar 4.2.1. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, und $n = m+k$. Ist $p \in M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ für eine Funktion $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ mit $\operatorname{rang} Df = k$ auf Ω, so gilt*

$$T_pM = \ker Df(p).$$

Insbesondere ist T_pM ein m-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Für $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = w$ gilt

$$0 = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} = Df(\gamma(0))\gamma'(0) = Df(p)\, w \quad \Rightarrow \quad T_pM \subset \ker Df(p).$$

Nach Satz 4.2.2 gibt es andererseits, nach eventueller Permutation der Koordinaten, offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^k$ mit $p \in U \times V$, sowie $g \in C^1(U,V)$ mit

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

Die Graphenabbildung $G \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $G(x) = (x, g(x))$, bildet nach M ab. Schreiben wir $p = (x_0, g(x_0))$ für geeignetes $x_0 \in U$, so folgt für alle $v \in \mathbb{R}^m$

$$DG(x_0)v = \frac{d}{dt} G(x_0 + tv)|_{t=0} \in T_pM \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Bild} DG(x_0) \subset T_pM.$$

Zusammenfassend ist $\operatorname{Bild} DG(x_0) \subset T_pM \subset \ker Df(p)$. Aber $DG(x_0)$ ist injektiv, denn $DG(x_0)v = (v, Dg(x_0)v)$, und wegen $\operatorname{rang} Df(p) = k$ folgt mit der Dimensionsformel

$$\dim \operatorname{Bild} DG(x_0) = m = n - \operatorname{rang} Df(p) = \dim \ker Df(p).$$

Also gilt $\operatorname{Bild} DG(x_0) = \ker Df(p) = T_pM$. □

Die Folgerung zeigt, dass der Tangentialraum einer m-dimensionalen Untermannigfaltigkeit tatsächlich ein m-dimensionaler Vektorraum ist. Dies zeigt, dass die Dimension einer C^1-Untermannigfaltigkeit wohldefiniert ist, das heißt es kann nicht Plättungen mit verschiedenen Dimensionen von M geben. Auf die Idee wäre vermutlich auch kaum jemand gekommen. Wir kommen nun zur sogenannten Lagrange-Multiplikatorenregel.

Korollar 4.2.2 (Extrema mit Nebenbedingungen). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen,*

$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ und $\varphi \in C^1(\Omega)$. Gilt dann für ein $p \in f^{-1}(0)$

(1) *$\varphi(q) \geq \varphi(p)$ für alle $q \in \Omega$ mit $f(q) = 0$,*

(2) *$\operatorname{rang} Df(p) = k$,*

so gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} \varphi(p) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \operatorname{grad} f_i(p)$.

Beweis: Nach eventueller Verkleinerung von Ω ist $\operatorname{rang} Df = k$ auf Ω und $M := f^{-1}(0)$ ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wobei $m = n - k$. Ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$, so hat hat $\varphi \circ \gamma$ in $t = 0$ ein lokales Minimum und folglich

$$0 = \frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))|_{t=0} = \langle \operatorname{grad} \varphi(p), v \rangle,$$

das heißt $\operatorname{grad} \varphi(p) \in (T_pM)^\perp$. Da $f_j|_M \equiv 0$, gilt analog $\operatorname{grad} f_j(p) \in (T_pM)^\perp$ für $1 \leq j \leq k$. Aber $\dim (T_pM)^\perp = k$ nach Korollar 4.2.1, und die Vektoren $\operatorname{grad} f_j(p)$ sind die Zeilenvektoren der Matrix $Df(p)$ mit Rang k. Wegen der Gleichheit von Zeilenrang und Spaltenrang ist $\{\operatorname{grad} f_j(p) : 1 \leq j \leq k\}$ eine Basis von $(T_pM)^\perp$, und die Behauptung folgt. $\square$

Beispiel: Für eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachten wir hier nochmals das Problem, die quadratische Form $\varphi(x) = \langle Bx, x\rangle$ zu minimieren unter der Nebenbedingung $f(x) = \|x\|^2 - 1 = 0$. Da $\mathbb{S}^{n-1} = f^{-1}(0)$ kompakt und φ stetig, wird das Infimum in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ angenommen. Nach Korollar 4.2.2 gibt es dann ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} \varphi(x_0) = \lambda \operatorname{grad} f(x_0)$, also $Bx_0 = \lambda x_0$. Somit hat jede symmetrische Matrix B mindestens einen Eigenvektor, vergleiche mit Satz 15.3.2, HM I.

Definition 4.2.3. *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $m < n$ und $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. ϕ heisst Immersion, falls für alle $x \in U$ gilt:*

$$rang D\phi(x) = m$$

Beispiel:

(1) $\gamma \in C^1\left((a,b), \mathbb{R}^n\right),\ \gamma'(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in (a,b)$ ist eine Immersion.

(2) $h \in C^1(U, \mathbb{R}^l),\ m + l = n,\ \phi(x) = (x, h(x)) \quad \Rightarrow \quad \phi$ ist eine Immersion.

Satz 4.2.3. *$\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ sei eine Immersion von $U \subset \mathbb{R}^m$. Zu $x_0 \in U$ mit $\phi(x_0) = p_0$ wähle man Koordinaten $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$, $l = n - m$, so dass*

$$D\phi(x_0)\,(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}.$$

Weiter sei $p_0 = \phi(x_0) = (x_0, y_0)$. Dann gibt es eine Umgebung V von $x_0 \in \mathbb{R}^m$ und einen Diffeomorphismus $T \in C^1\left(V, \mathbb{R}^m\right)$ mit $T(x_0) = x_0$, sowie eine Funktion $h \in C^1(V, \mathbb{R}^l)$ mit $h(x_0) = y_0$, so dass für alle $x \in V$ gilt:

$$(\phi \circ T)(x) = (x, h(x))$$

Bemerkung: Damit ist Bildϕ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Seien $\pi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \pi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l,\ \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ definiert durch

$$\pi_1(x, y) = x,\ \pi_2(x, y) = y$$

Definiere weiter $f = \pi_1 \circ \phi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$.
Mit Hilfe der Voraussetzung gilt: $Df(x_0) = \pi_1 \circ D\phi(x_0) = D\phi(x_0)$ und damit ist $Rang Df(x_0) = m$, also ist $Df(x_0)$ invertierbar.

Aus Satz 4.1.2 erhalten wir die Existenz von Umgebungen U_0 von x_0 und V von $f(x_0) = x_0$, so dass

$$f\,|_{U_0}\colon\ U_0 \to V$$

ein C^1-Diffeomorphismus ist.
Wir setzen $T = (f\,|_{U_0})^{-1} \in C^1\left(V, \mathbb{R}^m\right),\ h = \pi_2 \circ \phi \circ T \in C^1\left(V, \mathbb{R}^l\right)$.
Es gilt:

$$\pi_1 \circ \phi \circ T = f \circ T = id \quad \forall\, x \in V.$$

und damit folgt

$$\left(\phi \circ T\right)(x) = \left(\pi_1 \circ \phi \circ T(x), \pi_2 \circ T \circ \phi(x)\right) = (x, h(x)).$$

□

Beispiel: Es sei $\phi \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right),\ \phi(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}$

<u>Behauptung 1</u>: $\phi :\ \mathbb{R}^2 \to S^2$

Dies folgt aus $\left\|\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1-x^2-y^2 \end{pmatrix}\right\|^2 = 4x^2+4y^2+\underbrace{\left(1-x^2-y^2\right)^2}_{=1+(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)}$

$$= 1+2x^2+2y^2+(x^2+y^2)^2 = (1+x^2+y^2)^2.$$

<u>Behauptung 2</u>: ϕ ist eine Immersion ($Rang D\phi(x,y) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_x\phi, \partial_y\phi$ linear unabhängig)

Dazu berechnen wir $\partial_x\phi(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} - \frac{2x}{1+x^2+y^2}\phi(x,y)$

$\partial_y\phi(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2y \end{pmatrix} - \frac{2y}{1+x^2+y^2}\phi(x,y)$

und damit gilt $\det\left(\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi\right) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^3}\det\begin{pmatrix} 2x & 2 & 0 \\ 2y & 0 & 2 \\ 1-x^2-y^2 & -2x & -2y \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{(1+x^2+y^2)^3}\cdot\left(4-4x^2-4y^2+8x^2+8y^3\right)$$

$$= \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} > 0.$$

<u>Behauptung 3</u>: ϕ ist injektiv und $\phi\left(\mathbb{R}^2\right) = S^2 \backslash \{(0,0,-1)\}$.

Für ein festes $r > 0$ bildet ϕ den Kreis $\partial B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ bijektiv auf den Breitenkreis auf S^2 mit z-Komponente $\frac{1-r^2}{1+r^2}$ ab, denn für alle $(x,y) \in \partial B_r(0)$ gilt $x^2+y^2 = r^2$ und damit folgt $\phi(x,y) = \frac{1}{1+r^2}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1-r^2 \end{pmatrix}$

Weiterhin haben wir $\varphi(r) := \frac{1-r^2}{1+r^2}$, $\lim\limits_{r\to 0}\phi(r) = 1$, $\lim\limits_{r\to\infty}\phi(r) = -1$ und dies zeigt das ganze Sphäre ohne den Südpol durch ϕ überdeckt wird.

<u>Behauptung 4</u>: Die Inverse $\pi = (\phi)^{-1}$ ist die stereographische Projektion vom Südpol mit

$$\pi: \ S^2\backslash\{0,0,-1\} \to \mathbb{R}^2, \ (u,v,w) \to \frac{(u,v)}{1+w}$$

Sei $(u,v,w) = \phi(x,y) \in S^2\backslash\{0,0,-1\}$ und ohne Einschränkung sei $v = 0$, also auch $y = 0$. Dann gilt

$$u = \frac{2x}{1+x^2}, \ w = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad 1+w = \frac{2}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1+x^2}{2}u = \frac{u}{1+w}.$$

5 Integration im $\mathbb{R}^n$

5.1 Riemannsches Integral über einem Quader

Definition 5.1.1. ***i)*** *Ein n-dimensionaler Quader ist ein Produkt*

$$Q = \prod_{i=1}^{n} I_i = \{x = (x_1, .., x_n) : \ x_i \in I_i \quad \forall\, 1 \leq i \leq n\}$$

von Intervallen $I_1, .., I_n$. Solch ein Q hat Elementarinhalt

$$\mu(Q) = \mu_n(Q) = \prod_{i=1}^{n} |I_i|$$

ii) *Eine Zerlegung $P = \{Q_k : 1 \leq k \leq K\}$ eines Quaders $Q = \bigcup_{k=1}^{K} Q_k$ in disjunkte Teilquader $Q_k \subset Q$ hat die Feinheit*

$$\delta_p = \max_{1 \leq k \leq K} diam\ Q_k, \ diam\ Q_k := \sup_{x,y \in Q_k} ||x - y||$$

iii) *Eine Funktion $f : \ Q \to \mathbb{R}$ auf einem Quader Q heisst Treppenfunktion, falls f eine Darstellung $f = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{Q_k}$ besitzt, mit einer Zerlegung $P = \{Q_k : 1 \leq k \leq K\}$ von Q und Konstanten $c_k \in \mathbb{R}$*

Definition 5.1.2. *Eine Zerlegung $\tilde{P} = \{\tilde{Q}_j : \ 1 \leq j \leq J\}$ ist eine Verfeinerung der Zerlegung $P = \{Q_k : \ 1 \leq k \leq K\}$ des Quaders Q, falls jedes $\tilde{Q}$ in einem Q_k enthalten ist.*

Bemerkung:

(1) Seien $P = \{Q_k : 1 \leq k \leq K\}, \ R = \{S_l : 1 \leq l \leq L\}$ Zerlegungen von Q. Dann ist $\tilde{P} = \{Q_k \cap S_l : \ 1 \leq k \leq K, \ 1 \leq l \leq L\}$ eine Zerlegung von Q, welche P und Q verfeinert.

(2) Sei $Q = \prod_{i=1}^{n} I_i$ und seien $P_i = \{I_{i_k} : \ 1 \leq k \leq K_i\}$ Zerlegungen der Intervalle I_i. Die Produktzerlegung P von Q ist

$$P = \prod_{i=1}^{n} P_i = \{\prod_{i=1}^{n} I_{i_k} : 1 \leq k \leq K_i\}$$

(3) Jede Zerlegung von Q lässt sich zu einer Produktzerlegung verfeinern.

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader.

Definition 5.1.3. *Das Riemann (R)-Integral einer Treppenfunktion* $f = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{Q_k}$ *ist*

$$\int_Q f \, \mathrm{d}\mu := \int_Q \left(\sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{Q_k} \right) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{K} c_k \mu(Q_k)$$

Definition 5.1.4. ***i)*** *Das untere bzw. obere R-Integral von f sind erklärt durch*

$$\underline{\int_Q} f \, \mathrm{d}\mu = \sup\{\int_Q e \, \mathrm{d}\mu : \ e \, \textit{Treppenfunktion}, \ e \leq f\}$$
$$\overline{\int_Q} f \, \mathrm{d}\mu = \inf\{\int_Q g \, \mathrm{d}\mu : \ g \, \textit{Treppenfunktion}, \ g \geq f\}$$

ii) *f heisst R-integrabel über Q, falls*

$$\underline{\int_Q} f \, \mathrm{d}\mu = \overline{\int_Q} f \, \mathrm{d}\mu =: \int_Q f \, \mathrm{d}\mu$$

Bemerkung:

(1) Es gilt: $\underline{\int_Q} f \, \mathrm{d}\mu \leq \overline{\int_Q} f \, \mathrm{d}\mu \quad \forall \, f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt.

(2) f ist R-integrabel, g.d.w. $\forall \, \epsilon > 0 \; \exists$ Treppenfunktionen e, g mit $e \leq f \leq g$ und

$$\int_Q g \, \mathrm{d}\mu - \int_Q e \, \mathrm{d}\mu < \epsilon.$$

Satz 5.1.1. *$f \in C^0\left(\overline{Q}\right)$. Dann ist f über Q R-integrabel und für jede Folge $P^{(l)} = \{Q_k^{(l)} : \ 1 \leq k \leq K^{(l)}\}$ von Zerlegungen von Q mit Feinheit $\delta_{P^{(l)}} \to 0$ gilt für eine* *beliebige Wahl von Punkten* $x_k^{(l)} \in Q_k^{(l)}$ *stets, dass*

$$\sum_{k=1}^{K^{(l)}} f\left(x_k^{(l)}\right) \mu\left(Q_k^{(l)}\right) \to \int_Q f \, \mathrm{d}\mu$$

Satz 5.1.2. *Seien* $f, g : \ q \to \mathbb{R}$ *beschränkt und R-integrabel mit* $f \leq g$. *Dann gilt*

$$\int_Q f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_Q g \, \mathrm{d}\mu.$$

Satz 5.1.3. *Seien* $f, f_1, f_2 : \ Q \to \mathbb{R}$ *beschränkt und R-integrabel und sei* $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) *Die Funktionen* $\alpha f, \ f_1 + f_2$ *sind R-integrabel mit*

$$\int_Q (\alpha f) \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_Q f \, \mathrm{d}\mu, \ \int_Q (f_1 + f_2) \, \mathrm{d}\mu = \int_Q f_1 \, \mathrm{d}\mu + \int_Q f_2 \, \mathrm{d}\mu$$

ii) *Die Funktionen* $|f|, \ \min\{f_1, f_2\}, \ \max\{f_1, f_2\}$ *sind auch R-integrabel.*

Korollar 5.1.1. ***i)*** *Sei* $f : \ Q \to \mathbb{R}$ *beschränkt und R-integrabel. Dann gilt*

$$\left| \int_Q f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_Q |f| \, \mathrm{d}\mu \leq ||f||_\infty \, \mu(Q)$$

ii) *Seien* $f, f_k \in C^0(\overline{Q})$ *mit* $f_k \to f$ *gleichmässig. Dann gilt*

$$\left| \int_Q f \, \mathrm{d}\mu - \int_Q f_k \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_Q |f - f_k| \, \mathrm{d}\mu \leq ||f_k - f||_\infty \, \mu(Q) \to 0$$

Satz 5.1.4. *Sei* $f : Q \to \mathbb{R}$ *beschränkt und über* Q *R-integrabel, und sei* $P = \{Q_k : 1 \leq k \leq K\}$ *eine Zerlegung von* Q *in disjunkte Quader* Q_k, $1 \leq k \leq K$. *Dann gilt*

$$\int_Q f d\mu = \sum_{k=1}^{K} \int_{Q_k} f d\mu.$$

5.2 Satz von Fubini

Satz 5.2.1. *(Fubini) Sei* $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ *und sei* $f \in C^0(Q)$. *Dann gilt:*

$$\int_Q f \, \mathrm{d}\mu = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, \mathrm{d}x \right) \, \mathrm{d}y.$$

Beispiel: Sei $Q = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ und $f(x, y) = \sin(x - y) \in C^0(Q)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\int_Q f \, \mathrm{d}\mu &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sin(x-y) \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 [\cos(x-y)]_{y=0}^{y=2\pi} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \underbrace{(\cos(x-2\pi) - \cos x)}_{=0} \, \mathrm{d}x \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Beweis. Seien $P_1 = \{I_{1j} : \ 1 \leq j \leq J\}, \ P_2 = \{I_{2k} : \ 1 \leq k \leq K\}$ Zerlegungen von $I_1 = [a,b]\,, \ I_2 = [c,d]$ und sei

$$
P = P_1 \times P_2 = \{Q_{jk} = I_{1j} \times I_{2k} : \ 1 \leq j \leq J, \ 1 \leq k \leq K\}.
$$

Für $x \in I_1$ setze $g(x) := \displaystyle\int_c^d f(x,y) \, \mathrm{d}y$.
Behauptung: $g \in C^0(I_1)$.

Sei dazu $(x_k) \in I_1$ mit $x_k \to x_0 \in I_1$.

$$
|g(x_k) - g(x_0)| = \left| \int_c^d (f(x_k,y) - f(x_0,y)) \, \mathrm{d}y \right| \leq \sup_{c \leq y \leq d} |f(x_k,y) - f(x,y)| \, |d-c|
$$

Da f gleichmässig stetig ist, folgt

$$
|g(x_k) - g(x_0)| \to 0
$$

und damit die Behauptung.

Für beliebig gewählte Punkte $x_j \in I_{1j}, \ y_k \in I_{2k}$ gilt wegen Satz 5.1.1

$$
\begin{aligned}
\int_Q f \, \mathrm{d}\mu &= \lim_{\delta_{p_1} \to 0, \delta_{p_2} \to 0} \left(\sum_{j,k} f(x_j, y_k) \mu(Q_{jk}) \right) \\
&= \lim_{\delta_{p_1} \to 0} \sum_{j=1}^{J} \underbrace{\lim_{\delta_{p_2} \to 0} \left(\sum_{k=1}^{K} f(x_j, y_k) \, |I_{2k}| \right)}_{\overset{\text{HMI}}{=} \int_c^d f(x_j, y) \, \mathrm{d}y = g(x_j)} |I_{1j}| \\
&= \lim_{\delta_{p_1} \to 0} \sum_{j=1}^{J} g(x_j) \, |I_{1j}| \\
&= \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \qquad \big(\text{da } g \in C^0(I_1)\big) \\
&= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Die zweite Gleichung beweist man analog. $\square$

Beispiel:

(1) Sei $Q = [0,1] \times [0,1] = [0,1]^2$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_Q \mathrm{e}^{x+y} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^x \left(\int_0^1 \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right)^2 = (\mathrm{e}-1)^2\end{aligned}$$

(2) $Q = [0,1]^2$

$$\begin{aligned}\int_Q y\mathrm{e}^{xy}\,d\mu &= \int_0^1 \left(\int_0^1 y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 [\mathrm{e}^{xy}]_{x=0}^{x=1}\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 (\mathrm{e}^y - 1)\,\mathrm{d}y\\ &= [\mathrm{e}^y - y]_{y=0}^{y=1} = e - 2.\end{aligned}$$

Satz 5.2.2. *Sei* $Q = \prod_{i=1}^n [a_i\cdot, b_i\cdot]$ *und* $f \in C^0(Q)$. *Dann gilt*

$$\int_Q f\,\mathrm{d}\mu = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(...\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,..,x_n)\,\mathrm{d}x_n\right)...\right)\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1$$

und die Reihenfolge der Integration darf beliebig vertauscht werden.

5.3 Jordan-Bereiche

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $Q \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Quader mit $\Omega \subset Q$.

Definition 5.3.1. Ω *heisst Jordan-messbar, falls* χ_Ω *über* Q *R-integrabel ist. In diesem Fall ist*

$$\mu(\Omega) = \int_Q \chi_\Omega\,\mathrm{d}\mu$$

das n-dimensionale Jordan-Mass von Ω.

Bemerkung:

(1) Die Definition ist unabhängig von der Wahl von Q.

(2) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, Jordan-messbar $\overset{\text{Satz 5.1.2}}{\Longrightarrow}$ $\mu(\Omega_1) \leq \mu(\Omega_2)$.

Beispiel:

(1) Jeder Quader Q_0 ist Jordan-messbar.

(2) Die Vereinigung $\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} Q_k$ disjunkter Quader ist Jordan-messbar mit

$$\mu(\Omega) = \sum_{k=1}^{K} \mu(Q_k).$$

Definition 5.3.2. *Ein* $\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} Q_k$ *mit disjunkten Quadern* Q_k, $1 \leq k \leq K$, *heisst Elementarfigur (EF).*

Satz 5.3.1. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt. Es sind äquivalent:*

i) Ω *ist Jordan-messbar.*

ii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ *Elementarfiguren* $E, G \subset \mathbb{R}^n$ *mit* $E \subset \Omega \subset G$ *und*

$$\mu(G \backslash E) = \mu(G) - \mu(E) < \varepsilon.$$

iii) $\partial\Omega$ *ist Jordan-messbar mit* $\mu(\partial\Omega) = 0$.

In jedem dieser Fälle gilt:

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &= \inf\{\mu(G) : G \supset \Omega, G \textit{ Elementarfigur}\}\\ &= \sup\{\mu(E) : E \subset \Omega, E \textit{ Elementarfigur}\}.\end{aligned}$$

Beispiel:

i) Sei $\psi \in C^0([a,b])$ mit $\psi \geq 0$. Dann ist

$$\Omega_\psi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq \psi(x)\}$$

Jordan-messbar mit

$$\mu(\Omega_\psi) = \int_a^b \psi(x)\, \mathrm{d}x$$

Beweis. Da ψ stetig ist folgt aus HM I das ψ R-integrabel ist. Also existieren für alle $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $e, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $0 \leq e \leq \psi \leq g$ und

$$\int_a^b g\, \mathrm{d}x - \int_a^b e\, \mathrm{d}x < \varepsilon$$

e und g definieren Elementarfiguren $\Omega_e,\ \Omega_g$ und es gilt:

$$\mu(\Omega_g) = \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x,\ \mu(\Omega_e) = \int_a^b e(x)\ \mathrm{d}x$$

$\Rightarrow\quad \mu(\Omega_g) - \mu(\Omega_e) < \varepsilon,\ \Omega_e \subset \Omega_\psi \subset \Omega_g$

$\Rightarrow\quad \Omega_\psi$ Jordan-messbar mit $\mu(\Omega_\psi) = \displaystyle\int_a^b \psi(x)\ \mathrm{d}x$ $\square$

ii) Sei $\Omega = \{(x,y) :\ |x| + |y| \leq 1\}$ (Rhombus)
Es gilt $\mu(\Omega) = 4 \cdot \displaystyle\int_0^1 (1-x)\ \mathrm{d}x = 2$.

iii) Seien $a, b > 0,\ \psi(x) = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} \in C^0\left([-a,a]\right)$

$$\begin{aligned}\Omega_\psi &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| \leq a,\ 0 \leq y \leq \psi(x)\} \\ &= \{(x,y)^2 \in \mathbb{R}^2 :\ \underbrace{y^2 \leq b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}_{\Leftrightarrow\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1}, y \geq 0\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(\Omega_\psi) &= b\int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\ \mathrm{d}x,\ x = a\cos t,\ dx = -a\sin t\mathrm{d}t \\ &= ab\int_0^\pi \sin^2 t\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}ab\end{aligned}$$

iv) Beispiel i) gilt auch in höheren Dimensionen. Sei dazu $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein $(n-1)$-Quader und sei $\psi \in C^0(\overline{Q'}),\ \psi \geq 0$. Dann ist

$$\Omega_\psi = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n :\ x' \in Q',\ 0 \leq x_n \leq \psi(x')\}$$

Jordan-messbar mit $\mu(\Omega_\psi) = \displaystyle\int_{Q'} \psi(x')\ \mathrm{d}\mu$.

v) Sei $Q' = [-1,1]^2,\ \psi(x,y) = \sqrt{\max\{0, 1 - x^2 - y^2\}} \in C^0(Q')$.

$$\Omega_\psi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \mu(\Omega_\psi) &= \int_{[-1,1]^2} \psi(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x,y) \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&\text{Subs.: } y = \sqrt{1-x^2}\cdot \sin t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = \sqrt{1-x^2}\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} (1-x^2) \left(\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t}_{=\frac{\pi}{2}} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{3}\pi
\end{aligned}$$

Definition 5.3.3. *Eine beschränkte Jordan-messbare Menge Ω heisst Nullmenge, falls $\mu(\Omega) = 0$.*

Satz 5.3.2. ***i)*** *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, Jordan-messbar mit $\Omega \subset Q$ Quader*
$\Rightarrow \quad \Omega^c := Q \backslash \Omega$ *ist Jordan-messbar.*

ii) *Seien $\Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar, $1 \le k \le K$. Dann ist $\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} \Omega_k$ Jordan-messbar mit*

$$\mu(\Omega) \le \sum_{k=1}^{K} \mu(\Omega_k).$$

„=“ gilt genau dann, wenn $\Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset \quad \forall\, k \neq l$

iii) *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar, $a \in \mathbb{R}^n$.*
$\Rightarrow \quad a + \Omega$ *ist Jordan-messbar und*

$$\mu(a+\Omega) = \mu(\Omega)$$

iv) *Ω sei wie oben, $R \in SO(n) \quad \Rightarrow \quad R\Omega$ Jordan-messbar mit $\mu(R\Omega) = \mu(\Omega)$.*

Beweis. **i)** Es gilt $\Omega^c \subset Q$ und weiter ist

$$\chi_{\Omega^c}(x) = \chi_Q(x) - \chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \Omega^c \\ 0, & \text{für } x \in \Omega \end{cases}$$

Also ist χ_{Ω^c} R-integrabel und damit ist Ω^c Jordan messbar.

ii) Wir beweisen die Aussage nur für $k = 2$:
Es gilt $\chi_{(\Omega_1 \cup \Omega_2)} = \max\{x_{\Omega_1}, \chi_{\Omega_2}\}$ und damit ist die charakteristische Funktion R-integrabel.
Weiter ist $\chi_{(\Omega_1 \cup \Omega_2)} \leq \chi_{\Omega_1} + \chi_{\Omega_2}$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

□

Definition 5.3.4. *Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist von der Klasse C^1 (bzw. PC^1, C^k mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), falls zu jedem Punkt $x^0 \in \partial\Omega$ Koordinaten $(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ um $x^0 = (0, x_n^0)$, eine Zahl $d > 0$, ein offener Quader $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ um 0 und eine Funktion $\psi \in C^1(\overline{Q'})$ (bzw. PC^1, C^k) existieren, mit $0 \leq \psi \leq 2d$, wobei $\psi(0) = d = x_n^0$, sodass*

$$\Omega \cap (Q' \times [0, 2d]) = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x' \in Q', \ 0 \leq x_n \leq \psi(x')\} = \Omega_\psi$$

Beispiel:

i) $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ist von der Klasse C^k, $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

ii) Ein n-Quader ist von der Klasse PC^1.

iii) Falls der Rand von Ω eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Klasse C^k ist, so ist Ω von der Klasse C^k.

Satz 5.3.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und von der Klasse C^k mit $k \geq 1$. Dann ist Ω Jordan-messbar.*

Beweis. Nach der obigen Definition kann Ω durch endlich viele Gebiete der Form Ω_ψ überdeckt werden. Aus Satz 5.3.2 folgt damit die Behauptung. □

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar, $f : \ \Omega \to \mathbb{R}$ beschränkt. Weiter sei Q ein Quader mit $\Omega \subset Q$ und sei $\overline{f} : \ Q \to \mathbb{R}$ eine Fortsetzung von f, es gelte also $\overline{f} \mid_\Omega = f$.

Definition 5.3.5. *f heisst R-integrabel über Ω, falls die Funktion $\overline{f}\chi_\Omega$ über Q R-integrabel ist und wir definieren*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega \overline{f}\chi_\Omega \,\mathrm{d}\mu$$

Bemerkung:

(1) Die Definition ist unabhängig von der Wahl von $\overline{f}$. Also reicht es,

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in Q \backslash \Omega \end{cases}$$

zu betrachten.

(2) Sei $\overline{f}$ wie in 1. Dann gilt

$$\left| \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_Q \overline{f} \, \mathrm{d}\mu \right| \overset{\text{Korollar 5.1.1}}{\leq} \int_Q \left| \overline{f} \right| \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu \leq m\mu(\Omega),$$

wobei $m = \sup_\Omega |f| = \sup_Q \left| \overline{f} \right|$.

(3) Sei Q ein Quader in $\mathbb{R}^n$ und sei $f : \; Q \to \mathbb{R}$ R-integrabel und beschränkt. Weiter sei $\Omega \subset Q$ Jordan-messbar. Dann ist f über Ω R-integrabel.

Satz 5.3.4. *Sei $f : \; \Omega \to \mathbb{R}$ beschränkt und R-integrabel und sei $\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} \Omega_k$ eine disjunkte Zerlegung in Jordan-messbare Mengen Ω_k. Dann gilt*

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{K} \int_{\Omega_k} f \, \mathrm{d}\mu$$

Satz 5.3.5. *Ist Ω eine Jordan-Nullmenge (d.h $\mu(\Omega) = 0$), $f : \; \Omega \to \mathbb{R}$ beschränkt, so ist f R-integrabel über Ω mit*

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Beweis. (1) Ist f R-integrabel, dann folgt die Behauptung aus dem zweiten Teil der obigen Bemerkung.

(2) Sei nun f beliebig.
Sei Q Quader mit $\Omega \subset Q$ und $\overline{f}$ sei eine Fortsetzung von f mit $\overline{f}(x) = 0 \quad \forall \, x \in Q \backslash \Omega$. Sei weiter

$$m = \sup_\Omega |f| = \sup_Q \left| \overline{f} \right| < \infty.$$

Zu $\varepsilon > 0$ sei $G \subset Q$ eine Elementarfigur mit $\Omega \subset G$ und $\mu(G) < \varepsilon$ (diese existiert nach Satz 5.3.1). Setze $e = -m\chi_G, \; g = m\chi_G$. Dann sind $e, \; g$ Treppenfunktionen auf Q mit $e \leq \overline{f} \leq g$ und es gilt

$$-m\varepsilon \leq \int_Q e \, \mathrm{d}\mu \leq \int_Q g \, \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon m.$$

Die Behauptung folgt nun indem wir den Grenzwert $\varepsilon \to 0$ betrachten.

$\square$

Beispiel:

i) Sei $0 \leq \psi \in C^0([a,b])$ und sei

$$\Omega_\psi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; a \leq x \leq b, \; 0 \leq y \leq \psi(x)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Weiter sei $f \in C^0\left(\overline{\Omega}_\psi\right)$. Dann ist f R-integrabel mit

$$\int_{\Omega_\psi} f \, \mathrm{d}\mu = \int_a^b \left(\int_0^{\psi(x)} f(x,y) \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x.$$

ii) Für $\psi(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \in C^0([-a,a])$ und $f(x,y) = y$ gilt.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\psi} f \, \mathrm{d}\mu &= \int_{-a}^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^a \left(\left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^a \frac{b^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{b^2}{2} \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{x=-a}^{x=a} \\
&= \frac{2}{3} ab^2.
\end{aligned}$$

5.4 Satz von Green

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und von der Klasse PC^1. Falls f von der Form $f = \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}$ mit $g, h \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist, so können wir das Integral von f über Q in ein Randintegral umschreiben. Genauer gilt zum Beispiel für $Q = [a,b] \times [c,d]$ und $g \in C^1(Q)$:

$$-\int_Q \frac{\partial g}{\partial y} \, \mathrm{d}\mu = -\int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial g}{\partial y} \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x = -\int_a^b (g(x,d) - g(x,c)) \, \mathrm{d}x$$

Analog erhalten wir

$$\int_Q \frac{\partial h}{\partial x} \, \mathrm{d}\mu = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial h}{\partial x} \, \mathrm{d}x \right) \, \mathrm{d}y = \int_c^d \left(h(b,y) - h(a,y) \right) \, \mathrm{d}y$$

Also:

$$\int_Q \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) \, \mathrm{d}\mu = \int_{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4} (g \, \mathrm{d}x + h \, \mathrm{d}y) = \int_{\partial Q} (g \, \mathrm{d}x + h \, \mathrm{d}y) \, ,$$

wobei die Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ parametrisiert sind durch
$\gamma_1(x) = (x, c), \gamma_3(x) = (x, d), \ a \leq x \leq b$
$\gamma_2(y) = (b, y), \gamma_4(y) = (a, y), \ c \leq y \leq d.$
Wir bemerken noch das der Rand von Q so durchlaufen wird, das das Innere von Q immer auf der linken Seite liegt.

Um die obige Gleichung zu verfizieren, berechnen wir die einzelnen Kurvenintegrale:

$$\int_{\gamma_3} g \, \mathrm{d}x = \int_a^b g(x, d) \, \mathrm{d}x \Rightarrow \quad \int_{-\gamma_3} g \, \mathrm{d}x = - \int_a^b g(x, d) \, \mathrm{d}x$$

Analog erhalten wir

$$\int_{\gamma_1} g \, \mathrm{d}x = \int_a^b g(x, c) \, \mathrm{d}x$$

und da die Parametrisierungen der Kurven γ_2, γ_4 konstant in der x-Richtung sind, folgt

$$\int_{\gamma_2} g \, \mathrm{d}x = 0, \ \int_{\gamma_4} g \, \mathrm{d}x = 0.$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4} g \, \mathrm{d}x = - \int_a^b \left(g(x, d) - g(x, c) \right) \, \mathrm{d}x$$

und analog berechnen wir

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4} h \, \mathrm{d}y = \int_c^d \left(h(b, y) - h(a, y) \right) \, \mathrm{d}y.$$

Definition 5.4.1. ***i)*** *$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ heisst Normalbereich bezüglich y der Klasse C^1, falls*

$$\Omega = \{(x, y) : \ a \leq x \leq b, \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(y)\}$$

für geeignete $-\infty < a < b < \infty$ und mit Funktionen $\varphi \leq \psi \in C^1([a, b])$. Analog definieren wir einen Normalbereich bezüglich x oder von der Klasse PC^1, C^k mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

ii) *$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ heisst Normalbereich, falls Ω sowohl bezüglich x als auch bezüglich y ein Normalbereich ist.*

BEISPIELE:

i) Gedrehte Quader sind PC^1-Normalbereiche.

ii) $\overline{B_1(0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ ||x^2+y^2|| \leq 1\}$ ist ein Normalbereich.

iii) $B_2(0) \backslash B_1(0)$ ist kein Normalbereich.

BEMERKUNGEN:

(1) Ist $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ und ist $f \in C^0(\overline{\Omega})$, so haben wir

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

(2) Jedes beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ der Klasse PC^1 kann in endlich viele disjunkte Normalbereiche $\Omega_1, .., \Omega_K$ zerlegt werden.

Satz 5.4.1 (Green)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und von der Klasse PC^1 und seien $g, \ h \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt:*

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) \mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} (g \, \mathrm{d}x + h \, \mathrm{d}y) \, ,$$

wobei der Rand von Ω so parametrisiert wird, dass Ω zur Linken liegt.

Beweis. **i)** Sei Ω ein Normalbereich, also zum Beispiel

$$\Omega = \{(x,y) : \ a \leq x \leq b, \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

a) Wir nehmen an das $h = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(-\frac{\partial g}{\partial y} \right) \mathrm{d}\mu &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= - \int_a^b \left(g\left(x, \psi(x)\right) - g\left(x, \varphi(x)\right) \right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Jetzt parametrisieren wir $\partial\Omega = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ durch

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= (x, \varphi(x)) \, ; \ a \leq x \leq b \\ \gamma_2(x) &= (b, y) \, ; \ \varphi(b) \leq x \leq \psi(b) \\ \gamma_3(y) &= (x, \psi(x)) \, ; \ a \leq x \leq b \\ \gamma_4(y) &= (a, y) \, ; \ \varphi(a) \leq x \leq \psi(a). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4} g\ \mathrm{d}x &= \int_{\gamma_1} g\ \mathrm{d}x - \int_{\gamma_3} g\ \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b g\left(x,\varphi(x)\right)\ \mathrm{d}x - \int_a^b g\left(x,\psi(x)\right)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left(-\frac{\partial g}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

b) Jetzt sei $g = 0$. Analog zu a) gilt:

$$\int_\Omega \frac{\partial h}{\partial x}\ \mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}y$$

ii) Sei Ω von der Klasse PC^1:
Wegen der obigen Bemerkung gilt:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^K \Omega_k,\ \Omega_k \text{ offen},\ \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset \quad \forall\, k \neq l$$

mit Normalbereichen Ω_k. Es gilt:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}\mu$$

und mit Schritt i) haben wir

$$\int_{\Omega_k} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega_k} (g\ \mathrm{d}x + h\ \mathrm{d}y)$$

Da sich nun die neu geschaffenen, inneren Ränder gegenseitig herausheben, folgt die Behauptung.

$\square$

Definition 5.4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $\lambda = g\ \mathrm{d}x + h\ \mathrm{d}y$ eine 1-Form der Klasse C^1 auf Ω. Dann heisst*

$$\mathrm{d}\lambda := \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}\mu$$

die äussere Ableitung von λ, mit der Volumenform

$$\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}x\mathrm{d}y =: \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Beispiele:

(1) $\lambda = \frac{1}{2}(x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\mu$

(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C^2(\Omega)$: Sei

$$\lambda = \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

dann gilt

$$\mathrm{d}\lambda = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Mit Hilfe dieser Definition können wir den Satz 5.4.1 direkt umformen zu

Satz 5.4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und von der Klasse PC^1 und sei $\lambda = g\ \mathrm{d}x + h\ \mathrm{d}y$ eine 1-Form auf Ω der Klasse $C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt:*

$$\int_\Omega \mathrm{d}\lambda = \int_{\partial\Omega} \lambda,$$

wobei der Rand von Ω so parametrisiert wird, dass Ω zur Linken liegt.

Als nächstes möchten wir den Satz von Green nochmals umformulieren. Dazu sei $v = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2\right)$ ein Vektorfeld und wir definieren

$$\operatorname{rot} v := \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Satz 5.4.3 (Stokes). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und von der Klasse PC^1 und sei $v \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2\right)$. Dann gilt:*

$$\int_\Omega \mathit{rot}\ v\ \mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} v \cdot \mathrm{d}\vec{x},$$

wobei $\partial\Omega$ so parametrisiert wird, dass Ω zur Linken liegt.

Beweis. Sei $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ eine Parametrisierung von $\partial\Omega$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ wie im Satz. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} v \cdot \mathrm{d}\vec{x} &= \int_\gamma v \cdot \mathrm{d}\vec{x} \\ &= \int_I v\left(\gamma(t)\right) \cdot \gamma'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_I g(\gamma(t))\gamma_1'(t)\ \mathrm{d}t + \int_I h(\gamma(t))\gamma_2'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{\partial\Omega} g\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\ \mathrm{d}y \\ &= \int_\Omega \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega \mathrm{rot}\ v\ \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

□

Im Folgenden möchten wir den Begriff der Orientierung von $\partial\Omega$ präzisieren. Dazu sei n der nach aussen zeigende Normalenvektor längs $\partial\Omega$ und $\tau := \frac{\gamma'}{\|\gamma\|}$ der durch eine Parametrisierung γ von $\partial\Omega$ mit $\gamma' \neq 0$ induzierte Einheitstangentialvektor.

Definition 5.4.3. ***i)*** *Eine Orthonormalbasis (v, w) von $\mathbb{R}^2$ heisst positiv orientiert (oder ein Rechtssystem), falls (v, w) durch eine Drehung aus der Standardbasis (e_1, e_2) hervorgeht, sonst heisst (v, w) negativ orientiert.*

ii) *Eine Parametrisierung γ von $\partial\Omega$ heisst positiv orientiert, falls in jedem Punkt $p \in \partial\Omega$ das Paar $(n(p), \tau(p))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bilden.*

Der Rand in den obigen drei Sätzen ist also $\partial\Omega$ immer als positiv orientiert zu verstehen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $v = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Wir definieren

$$\mathrm{div}\, v := \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}$$

und wir bemerken, dass für $w := \begin{pmatrix} -h \\ g \end{pmatrix}$ gilt:

$$\mathrm{div}\, v = \mathrm{rot}\, w.$$

Weiter sei $\gamma \in PC^1([0, 1], \mathbb{R}^2$ eine positiv orientierte Parametrisierung von $\partial\Omega$. Dann folgt aus Satz 5.4.3

$$\int_\Omega \operatorname{div} v \, d\mu = \int_\Omega \operatorname{rot} w \, d\mu = \int_0^1 w(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$
$$= \int_0^1 w(\gamma(t)) \cdot \tau(\gamma(t)) \, ds,$$

mit $ds := \|\gamma'(t)\| dt$. Weiter gilt

$$w(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v(\gamma(t)) \quad \text{und} \quad \tau(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} n(\gamma(t)),$$

also haben wir

$$w(\gamma(t)) \cdot \tau(\gamma(t)) = v(\gamma(t)) \cdot n(\gamma(t))$$

und damit folgt

$$\int_\Omega \operatorname{div} v \, d\mu = \int_0^1 v(\gamma(t)) \cdot n(\gamma(t)) \, ds =: \int_{\partial\Omega} v \cdot n \, ds.$$

Satz 5.4.4 (Gauss)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und von der Klasse PC^1 und sei $v \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2\right)$. Dann gilt:*

$$\int_\Omega div \ v \ \mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} v \cdot n \ \mathrm{d}s,$$

wobei $\partial\Omega$ positiv orientiert ist.

Beispiel: Sei $\Omega = B_1(0)$ und sei $v(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dann gilt $\operatorname{div} v = 2$ und der äussere Normalenvektor and $\partial\Omega = S^1$ ist gegeben durch $n(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Damit folgt für die positiv orientierte Parametrisierung $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ von S^1

$$\begin{aligned} 2\mu\left(B_1(0)\right) &= \int_\Omega \operatorname{div} v \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{\partial\Omega} v \cdot n \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\mu(B_1(0)) = \pi.$$

5.5 Substitutionsregel

Satz 5.5.1 (Transformationssatz)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein C^1-Diffeomorphismus von U auf $V = \phi(U)$ und sei $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und Jordan-messbar. Dann ist $\phi(\Omega)$ Jordan-messbar und*

$$\mu\left(\phi(\Omega)\right) = \int_\Omega |\det D\phi(x)| \, \mathrm{d}\mu(x)$$

Bemerkung: Sei $\phi: \ U \to \mathbb{R}^n$ linear und invertierbar (d.h. $\phi(x) = Ax$), dann gilt:

$$\mu(A\Omega) = |\det A| \, \mu(\Omega)$$

Beispiel:

(1) Sei $g \in C^1\left((a,b)\right), \ g' > 0 \overset{\text{Kapitel 4}}{\Rightarrow} g$ ist C^1-Diffeomorphismus mit

$$g\left((a,b)\right) = (c,d)$$

Sei jetzt $a < x_0 < x_1 < b$ mit

$$\Omega := (x_0, x_1) \subset \overline{\Omega} \subset (a,b) \quad \Rightarrow \quad g(\Omega) = (g(x_0), g(x_1))$$

und

$$\mu\left(g(\Omega)\right) = g(x_1) - g(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} g'(x) \, \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} |\det Dg(x)| \, \mathrm{d}x.$$

(2) <u>Polarkoordinaten</u>

$\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \ r > 0, \ 0 < \theta < 2\pi$
Für $R > 0$ fest ist

$$\phi: \ (0,R) \times (0, 2\pi) \to B_R(0) \backslash \{(x,0): \ 0 \le x < R\}$$

ein C^∞-Diffeomorphismus. (siehe Kapitel 4).
Die Menge $\{(x,0): \ 0 \le x < R\}$ ist eine Jordan-Nullmenge und damit folgt

$$\begin{aligned} \mu(B_R(0)) &= \mu\left(B_R(0) \backslash \{(x,0): \ 0 \le x < R\}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{(\varepsilon, R-\varepsilon) \times (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)} |\det D\phi(r,\theta)| \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Weiter berechnen wir

$$D\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\det D\phi(r,\theta)| = r > 0$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \mu\left(B_R(0)\right) \quad &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^{R-\varepsilon} \left(\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} r \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} (2\pi - 2\varepsilon) \int_\varepsilon^{R-\varepsilon} r \; \mathrm{d}r \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} (\pi - \varepsilon) \left((R-\varepsilon)^2 - \varepsilon^2 \right) \\ &= \pi R^2 \end{aligned}$$

(3) Für $0 < a < b,\ 0 < c < d$ sei

$$G_{abcd} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x,\ a < \frac{x}{y} < b, c < xy < d\}$$

Wir suchen einen C^1-Diffeomorphismus

$$\phi :\ (a,b) \times (c,d) \to G_{abcd}.$$

Dazu definieren wir zuerst

$$\phi^{-1} := \psi :\ G_{abcd} \to (a,b) \times (c,d)$$

durch

$$\psi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{y}{x} \\ xy \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Auflösen der Gleichungen

$$\xi = \frac{y}{x},\ \eta = xy$$

für $x, y, \xi, \eta > 0$ nach x, y ergibt

$$x = \sqrt{\frac{\eta}{\xi}},\ y = \sqrt{\eta\xi}.$$

Also ist ϕ gegeben durch

$$\phi \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \\ \sqrt{\eta\xi} \end{pmatrix}.$$

ϕ ist bijektiv auf $(0,\infty)\times(0,\infty)$ mit

$$D\phi(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\frac{x}{\xi} & \frac{x}{\eta}\\ \frac{y}{\xi} & \frac{y}{\eta}\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \det D\phi(\xi,\eta)=-\frac{xy}{2\eta\xi}=-\frac{1}{2\xi}<0.$$

Also folgt

$$\mu(G_{abcd})=\int_a^b\left(\int_c^d \frac{1}{2\xi}\,\mathrm{d}\mu\right)\,\mathrm{d}\xi=(d-c)\int_a^b\frac{1}{2\xi}\,\mathrm{d}\xi=\frac{d-c}{2}\log\frac{b}{a}.$$

Satz 5.5.2. *$U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $\phi\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ Diffeomorphismus von U auf $V=\phi(U)$, $\Omega\subset\overline{\Omega}\subset U$ sei beschränkt und Jordan-messbar, und sei $f:\ \phi(\Omega)\to\mathbb{R}$ beschränkt und R-integrabel. Dann ist die Funktion $(f\circ\phi)\,|\det D\phi|:\ \Omega\to\mathbb{R}$ auch R-integrabel mit*

$$\int_{\phi(\Omega)} f\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega f\circ\phi\,|\det D\phi|\,\mathrm{d}\mu.$$

Beispiel: Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.
Es gilt

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2&=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right).\\ &\overset{\text{Fubini}}{=}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\mu(x,y)\end{aligned}$$

Indem wir Polarkoordinaten

$$\phi:\ \underbrace{(0,\infty)\times(0,\infty)}_{=\Omega}\to\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0):\ 0\le x<\infty\}$$

$$\phi(r,\theta)=\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}$$

einführen erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\mu(x,y)\quad&\overset{\text{Satz 5.3.5}}{=}\int_{\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0):\,0\le x<\infty\}}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\mu(x,y)\\ &=\int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)}\mathrm{e}^{-r^2}r\,\mathrm{d}\mu(r,\theta)\\ &=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\\ &=2\pi\int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\\ &=\pi\left[\mathrm{e}^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=\infty}\\ &=\pi.\end{aligned}$$

Also gilt
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

5.6 Oberflächenmass und Fluss-Integral

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine injektive Immersion (d.h $Rang D\phi(x) = 2$ für alle $x \in U$).Weiter sei $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und Jordan-messbar und sei $S = \phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^3$ das durch ϕ parametrisierte Flächenstück.

Beispiel: $\phi :\ \mathbb{R}^2 \to S^2 \backslash \{\text{Südpol}\}$
$$\phi(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1-u^2-v^2 \end{pmatrix}$$
parametrisiert die Sphäre ohne den Südpol.

Notation: $(u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Definition 5.6.1. *Der 2-dimensionale Flächeninhalt von S (bzgl. ϕ) ist*
$$\mu_2(S) = \int_S \mathrm{d}\sigma := \int_\Omega ||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||\ \mathrm{d}\mu(u,v)$$
mit dem skalaren Flächenelement $\mathrm{d}\sigma := ||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||\ \mathrm{d}\mu(u,v)$.

Bemerkung:

(1) Falls $\phi(U) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ (oder falls wir zu gegebenem $w = (u,v)$ Koordinaten $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ wählen, so dass $\partial_u\phi(w),\ \partial_v\phi(w) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$), so gilt:
$$||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||\,(w) = |\det(D\phi(w))| = \left|\partial_u\phi^1\partial_v\phi^2 - \partial_v\phi^1\partial_u\phi^2\right|$$
Also verallgemeinert die obige Definition den Transformationssatz.

(2) Allgemein gilt:
$$||\partial_u\phi \times \partial_v\phi|| = \sqrt{\det g},$$
wobei $g = D\phi^T D\phi = \begin{pmatrix} ||\partial_u\phi||^2 & \partial_u\phi\cdot\partial_v\phi \\ \partial_u\phi\cdot\partial_v\phi & ||\partial_v\phi||^2 \end{pmatrix}$ die von ϕ induzierte Gramsche Matrix bezeichnet.

Sei z.B. $D\phi(w):\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} ||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||\,(w) &= |\det D\phi(w)| \\ &= \left|\det(D\phi(w))^T\right| \\ &= \sqrt{\det(D\phi)^T \det(D\phi)(w)} \\ &= \sqrt{\det g} \end{aligned}$$

(3) $\mu_2(S)$ ist unabhängig von der Wahl von ϕ.

Beweis. Seien $\phi_i \in C^1(U_i, \mathbb{R}^3)$ injektive Immersionen, $\Omega_i \subset \overline{\Omega}_i \subset U_i$ beschränkt und Jordan-messbar und $\phi_i(\Omega_i) = S$ für $i = 1, 2$
Behauptung: Die Abbildung $f = \phi_2^{-1} \circ \phi_1 \in C^1(\overline{\Omega}_1, \mathbb{R}^2)$ ist ein Diffeomorphismus von Ω_1 auf Ω_2.
Angenommen die Behauptung ist richtig, dann folgt mit

$$\phi_1 = \phi_2 \circ f \quad \Rightarrow \quad D\phi_1 = (D\phi_2) \circ f\, Df$$

und mit Koordinaten wie in Bemerkung 2) :

$$\begin{aligned} \det g_1 &= \det(D\phi_1^T D\phi_1) \\ &= \det\left(Df^T (D\phi_2 \circ f)^T (D\phi_2 \circ f) Df\right) \\ &= \det(Df^T) \det\left((D\phi_2 \circ f)^T\,(D\phi_2 \circ f)\right) \det(Df) \\ &= (\det Df)^2 \det(g_2 \circ f) \\ \Rightarrow \quad \int_S \mathrm{d}\sigma &= \int_{\Omega_1} \sqrt{\det g_1}\ \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{\Omega_1} \sqrt{\det(g_2 \circ f)}\,|\det Df|\ \mathrm{d}\mu \\ &\overset{\text{Satz 5.5.2}}{=} \int_{\Omega_2} \sqrt{\det g_2}\ \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

□

Beispiel: Sei $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2, S^2)$,

$$\phi(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1-u^2-v^2 \end{pmatrix}$$

Nach HM I, Satz 15.6.2 gilt: $\det(a,b,c) = (a \times b) \cdot c$

$$\Rightarrow \quad ||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||^2 = (\partial_u\phi \times \partial_v\phi) \cdot (\partial_u\phi \times \partial_v\phi) = \det(\partial_u\phi, \partial_v\phi, \partial_u\phi \times \partial_v\phi)$$

Es gilt:

$$\phi = \frac{\partial_u \phi \times \partial_v \phi}{||\partial_u \phi \times \partial_v \phi||} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} ||\partial_u \phi \times \partial_v \phi|| &= \det\left(\partial_u \phi, \partial_v \phi, \frac{\partial_u \phi \times \partial_v \phi}{||\partial_u \phi \times \partial_v \phi||}\right) \\ &= \det\left(\phi, \partial_u \phi, \partial_v \phi\right) \\ &= \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} \end{aligned}$$

nach den Rechnungen in Kapitel 4. Also folgt

$$\mu_2(S^2) = \int_{\mathbb{R}^2} ||\partial_u \phi \times \partial_v \phi|| \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{(1+u^2+r^2)^2} \, \mathrm{d}\mu(u,v)$$

Nach Einführen von Polarkoordinaten und mit Hilfe von Satz 5.5.2 haben wir

$$\mu_2(S^2) = \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} \frac{4r}{(1+r^2)^2} \, \mathrm{d}\theta \right) \, \mathrm{d}r = 8\pi \int_0^\infty \frac{r}{(1+r^2)^2} \, \mathrm{d}r$$

Die Substitution $s = r^2$ liefert schliesslich

$$\mu_2(S^2) = 4\pi \int_0^\infty \frac{1}{(1+s)^2} \, \mathrm{d}s = 4\pi \left[-\frac{1}{1+s} \right]_{s=0}^{s=\infty} = 4\pi.$$

Definition 5.6.2. *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine injektive Immersion, $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und Jordan-messbar und $S := \phi(\Omega)$ das zugehörige Flächenstück im $\mathbb{R}^3$, $f : \overline{S} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist*

$$\int_S f \, \mathrm{d}\sigma := \int_\Omega (f \circ \phi) \, ||\partial_u \phi \times \partial_v \phi|| \, \mathrm{d}\mu(u,v)$$

wohldefiniert (also unabhängig von der Wahl von ϕ).

Beispiel: Sei $\phi,\ S = S^2$ wie oben, und sei $f(x,y,z) = z^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} f\ \mathrm{d}\sigma &= \int_{\mathbb{R}^2} (f \circ \phi)\, ||\partial_u \phi \times \partial_v \phi||\ \mathrm{d}\mu(u,v) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(1-u^2-v^2)^2}{(1+u^2+v^2)^2} \cdot \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}\ \mathrm{d}\mu(u,v) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)^2 4r}{(1+r^2)^4}\ \mathrm{d}\theta \right)\ \mathrm{d}r \\
&= 8\pi \int_0^\infty \frac{(1-r^2)^2 r}{(1+r^2)^4}\ \mathrm{d}r \\
&= 8\pi \int_0^\infty \left(\frac{4r}{(1+r^2)^4} - \frac{4r}{(1+r^2)^3} + \frac{r}{(1+r^2)^2} \right)\ \mathrm{d}r
\end{aligned}$$

Die Substitution $s = r^2$ liefert

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \int_0^\infty \left(\frac{4}{(1+s)^4} - \frac{4}{(1+s)^3} + \frac{1}{(1+s)^2} \right)\ \mathrm{d}s \\
&= 4\pi \left[-\tfrac{4}{3}(1+s)^{-3} + 2 \cdot (1+s)^{-2} - (1+s)^{-1} \right]_{s=0}^{s=\infty} \\
&= 4\pi \left[\tfrac{4}{3} - 2 + 1 \right] \\
&= \frac{4}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^2,\ \phi \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ injektive Immersion, $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$ beschränkt und Jordan-messbar und sei $S = \phi(\Omega)$ ein Flächenstück im $\mathbb{R}^3$.
In jedem Punkt $p \in \phi(w)$ mit $w \in \Omega$ spannen die Vektoren $\partial_u \phi(w),\ \partial_v \phi(w)$ den Tangentialraum an S im Punkt p auf, d.h

$$T_p S = Span\{\partial_u \phi(w), \partial_v \phi(w)\}$$

Durch Wahl eines Einheitsnormalenfelds $n:\ S \to \mathbb{R}^3$ mit $n(p) \perp T_p S,\ ||n(p)|| = 1$ an jedem Punkt $p \in S$, können wir S orientieren (also „oben“ und „unten“ definieren). Eine kanonische Wahl für n ist

$$n = \frac{(\partial_u \phi \times \partial_v \phi)(w)}{||(\partial_u \phi \times \partial_v \phi)(w)||}$$

mit $\phi(w) = p$.

Definition 5.6.3. *Sei $K = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \in C^1(W; \mathbb{R}^3)$, wobei $S \subset W$. Das Integral*

$$\int_S K \cdot n\ \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega (K \circ \phi) \cdot \frac{\partial_u \phi \times \partial_v \phi}{||\partial_u \phi \times \partial_v \phi||}\, ||\partial_u \phi \times \partial_v \phi||\ \mathrm{d}\mu = \int_\Omega (K \circ \phi)(\partial_u \phi \times \partial_v \phi)\ \mathrm{d}\mu$$

heisst der Fluss des Vektorfeldes K durch die mit $n = \dfrac{\partial_u \phi \times \partial_v \phi}{||\partial_u \phi \times \partial_v \phi||}$ orientierte Fläche S.

Beispiele:

(1) Sei $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3),\ \phi(u,v) = \dfrac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1-u^2-v^2 \end{pmatrix}$ und seien

$$S = \phi(\mathbb{R}^2) = S^2 \backslash \{(0,0,-1)\},\ K(p) = p.$$

Damit haben wir

$$\partial_u \phi(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix} - \frac{1}{(1+u^3+v^2)^2}\begin{pmatrix} 4u^2 \\ 4uv \\ 2u-2u^3-2uv^2 \end{pmatrix}$$

und

$$\partial_v \phi(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2v \end{pmatrix} - \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix} 4uv \\ 4v^2 \\ 2v-2u^2v-2v^3 \end{pmatrix}.$$

Ausserdem gilt:

$$||\phi(u,v)||^2 = 1 \begin{cases} \Rightarrow \quad 2\langle \partial_u \phi(u,v), \phi(u,v)\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(u,v) \perp \partial_u \phi(u,v) \\ \Rightarrow \quad 2\langle \partial_v \phi(u,v), \phi(u,v)\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(u,v) \perp \partial_v \phi(u,v) \end{cases}$$

Damit folgt $n = \pm\phi$.

Weiter haben wir $\partial_u \phi(0,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \partial_v \phi(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \partial_u \phi(0,0) \times \partial_v \phi(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad n\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \phi(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Insgesamt folgt $n = \phi$ und damit berechnen wir

$$\Rightarrow \quad \int_S K \cdot n \,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\phi \cdot \phi}_{=||\phi||^2=1} \ ||\partial_u \phi \times \partial_v \phi|| \ \mathrm{d}\mu = \int_S \mathrm{d}\sigma = 4\pi.$$

(2) $\phi, S = S^2 \backslash \{(0,0,-1)\}$ seien wie oben und wir definieren

$K(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix},\ n(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Damit folgt

$$\int_S K \cdot n \, \mathrm{d}\sigma = \int_S z^2 \, \mathrm{d}\sigma = \frac{4}{3}\pi.$$

5.7 Der Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Wir beginnen mit der definition einer Untermannigfaltigkeit mit Rand.

Definition 5.7.1. *i) Die Menge$S \subset \mathbb{R}^n$ ist eine eingebettete m-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit mit Rand der Klasse PC^1, $r \geq 1$, falls zu jedem $p_0 \in S$ eine Umgebung W von p_0 und eine injektive Immersion $\phi \in C^r(U; \mathbb{R}^n)$ einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^m$, sowie eine beschränkte Menge $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$ der Klasse PC^1 existieren, so dass*

$$S \cap W = \phi(\Omega)$$

ii) $p_0 \in S$ gehört zum relativen Rand ∂S von S, falls $\forall\ \phi$ wie in i) gilt: $p_0 \in \phi(\partial\Omega)$.

Ab jetzt betrachten wir den Fall $n = 3,\ m = 2$.

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück mit PC^1-Rand und sei $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine injektive Immersion, $U \subset R^2$ offen, $p = \phi(w),\ w \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$, mit Ω beschränkt und mit PC^1-Rand.

Definition 5.7.2. *Ein stetiges Einheitsnormalenfeld $n \subset C^0(S, \mathbb{R}^3)$ definiert eine Orientierung von S.*

Bemerkungen:

i) Ist $S = \phi(\Omega)$, so ergibt

$$n = \frac{\partial_u \phi \times \partial_v \phi}{||\partial_u \phi \times \partial_v \phi||}$$

eine Orientierung von S.

ii) Es gibt nicht-orientierbare Flächen! (z.B. das Möbius Band)

Sei S ein orientierbares Flächenstück mit Rand der Klasse PC^1 und sei $n \in C^0(S, \mathbb{R}^3)$ eine Orientierung von S. Wir wollen ∂S orientieren.
Sei ϕ eine lokale Parametrisierung (injektive Immersion) von S, wie in Definition 5.7.1 um

$$p = \phi(w) \in \partial S \subset M =: \phi(U)$$

mit $w \in \partial\Omega$.
Wähle eine Orthonormalbasis $\nu(p), \tau(p)$ für T_pM mit

$$\tau(p) \in T_p\partial S = D\phi(w)(I_w\partial\Omega)$$

und so, dass $\nu(p)$ die äussere Normale von S in M ist. Damit ist $(\nu(p), \tau(p), n(p))$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

Definition 5.7.3. ***i)*** *Die Orthonormalbasis $(\nu(p),\ \tau(p),\ n(p))$ von $\mathbb{R}^3$ ist positiv orientiert, falls $(\nu(p), \tau(p), n(p))$ durch eine Drehung aus (e_1, e_2, e_3) hervorgeht.*
Ansonsten heisst $(\nu(p), \tau(p), n(p))$ negativ orientiert.

ii) *Eine Parametrisierung Γ von ∂S mit $\Gamma' \neq 0$ heisst positiv orientiert, falls in jedem Punkt $p = \Gamma(t) \in \partial S$ das Tripel $(\nu(p), \tau(p), n(p))$ mit $\tau(p) = \dfrac{\Gamma'(t)}{||\Gamma'(t)||}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.*

Beispiele:

i) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\phi \in C^1(U \subset \mathbb{R}^3)$ sei eine injektive Immersion, $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$ sei beschränkt mit $\partial\Omega \in PC^1$ und $S = \phi(\Omega)$ sei ein Flächenstück im $\mathbb{R}^3$.
Sei $\gamma \in PC^1\left([0,1], \mathbb{R}^2\right)$ eine positiv orientierte Parametrisierung von $\partial\Omega$ und sei $\Gamma = \phi \circ \gamma \in PC^1\left([0,1], \mathbb{R}^3\right)$ die davon induzierte Parametrisierung von ∂S.
Weiter sei S durch

$$n = \frac{\partial_u\phi \times \partial_v\phi}{||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||}$$

orientiert. Dann ist Γ positiv orientiert.
Genauer: Sei $p \in \phi(w) \in \partial S$ und $w = \gamma(t) \in \partial\Omega$. Weiter sei ν_Ω die äussere Normale an $\partial\Omega$ in w. Ohne Einschränkung sei $\nu_\Omega = e_u$ und $\gamma'(t) = e_v$. Setze

$$\tilde{\nu} = D\phi(w)\nu_\Omega = \partial_u\phi(w)$$

$$\tilde{\tau} = D\phi(w)\gamma_t' = \partial_v\phi(w)$$

und normiere

$$\tau := \frac{\tilde{\tau}}{||\tilde{\tau}||}, \qquad \nu = \frac{\tilde{\nu} - \tau\left\langle \tau, \tilde{\nu}\right\rangle}{||\tilde{\nu} - \tau\left\langle \tau, \tilde{\nu}\right\rangle||}$$

Behauptung: (ν, τ, n) ist positiv orientiert.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(\nu, \tau, n) &= \underbrace{\frac{1}{||\tilde{\tau}||\,||\tilde{\nu} - \tau\,\langle \tau, \tilde{\nu}\rangle||}}_{=:c} \det(\tilde{\nu}, \tilde{\tau}, n) \\
&= c\,((\tilde{\nu} \times \tilde{\tau}), n) \\
&= \frac{c}{||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||} \cdot ||\partial_u\phi \times \partial_v\phi||^2 \\
&= c\,||\partial_u\phi \times \partial_v\phi|| > 0
\end{aligned}$$

□

ii) Sei $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $\phi(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1-u^2-v^2 \end{pmatrix}$ und sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega = \partial B_1(0) = S^1$. Dann gilt

$$\phi(\Omega) = \Big\{(x,y,z) \in S^2 :\ z > 0\Big\},\ \phi(\partial\Omega) = \Big\{(x,y,z) \in S^2 :\ z = 0\Big\} = S^1 \times \{0\}$$

Wähle Parametrisierung

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 2\pi$$

von $S^1 = \partial\Omega$.
Zuvor hatten wir bereits gezeigt: $n(p) = p$. Die Parametrisierung

$$\Gamma(t) = \phi \circ \gamma(t) = \frac{1}{1+\cos^2 t + \sin^2 t}\,(2\cos t, 2\sin t, 0)^T = (\cos t, \sin t, 0)^T$$

ist also positiv orientiert und die äussere Normale ist $\nu = -e_3$.

Sei $K = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \in C^1(W, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld auf einer Umgebung W der Fläche S.

Definition 5.7.4. *Das Vektorfeld*

$$rot\,K = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - Py \end{pmatrix} = \nabla \times K = \det \begin{pmatrix} \partial_x & P & e_1 \\ \partial_y & Q & e_2 \\ \partial_z & R & e_3 \end{pmatrix}$$

heisst Rotation von K.

Satz 5.7.1 (Stokes)**.** *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein kompaktes orientiertes Flächenstück der Klasse*

C^2 mit Rand der Klasse PC^1, und sei ∂S positiv orientiert. Dann gilt:

$$\int_S rot\, K \cdot n \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial S} K \cdot \, \mathrm{d}\vec{x}.$$

Bemerkung: Für $\phi = id,\ S = \Omega \subset \mathbb{R}^2,\ \phi:\ \Omega \to \Omega,\ n = e_3$ gilt:

$$\langle \mathrm{rot}\, K, n \rangle = Q_x - P_y,$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} K \cdot \, \mathrm{d}\vec{x} &= \int_{\partial\Omega} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) \\
&\overset{\text{Satz 5.4.1}}{=} \int_\Omega (Q_x - P_y) \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Omega \mathrm{rot}\, K \times n \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_S \mathrm{rot}\, K \cdot n \, \mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

mit

$$\mathrm{d}\sigma := ||\phi_u \times \phi_v|| \, \mathrm{d}\mu,\ \phi = id \quad \Rightarrow \quad \partial_u\phi \times \partial_v\phi = e_3.$$

Beispiel: Sei $K \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit

$$K(x,y,z) = \begin{pmatrix} x(y^2+z^2) \\ y(x^2+z^2) \\ z(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

und sei

$$E = \left\{ (x,y,z) :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

mit $a, b, c > 0$.
Sei $S = \left\{ (x,y,z) \in E :\ \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} \leq 1,\ z \geq 0 \right\}$. E sei durch die äussere Normale n orientiert und $\Gamma = \partial S$ sei der orientierte Rand von S. Es gilt

$$\mathrm{rot}\, K = \begin{pmatrix} 2yz - 2yz \\ 2xz - 2xz \\ 2xy - 2xy \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial S} K \cdot \, \mathrm{d}\vec{x} = \int_S \mathrm{rot}\, K \cdot n \, \mathrm{d}\sigma = 0$$

Beweis von Satz 5.7.1. **i)** Sei $S = \phi(\Omega)$ mit einer injektiven Immersion $\phi \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ und $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$. Der Rand von Ω sei in PC^1, γ sei eine positiv orientierte Parametrisierung von $\partial\Omega$, $\Gamma = \phi \circ \gamma \in PC^1$ sei die davon induzierte Parametrisierung von ∂S.

Setze

$$(K \circ \phi) D\phi =: \lambda = g \ \mathrm{d}u + h \ \mathrm{d}v$$

mit

$$g = (K \circ \phi)\partial_u \phi, \ h = (K \circ \phi)\partial_v \phi$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \int_{\partial S} K \cdot \ \mathrm{d}\vec{x} \quad &= \int_0^1 \underbrace{(K \circ \Gamma)(t)}_{=(K\circ\phi)(\gamma(t))} \cdot \quad \underbrace{\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}(t)}_{=D\phi(\gamma(t))\gamma'(t)} \quad \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \lambda\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t) \ \mathrm{d}t \\
&= \int_{\partial\Omega} (g \ \mathrm{d}u + h \ \mathrm{d}v)
\end{aligned}$$

<u>Behauptung</u>: Es gilt

$$(\operatorname{rot} K \circ \phi) \cdot (\phi_u \times \phi_v) = \partial_u h - \partial_v g.$$

Dies folgt aus

$$\partial_u h - \partial_v g = \partial_u (K \circ \phi)\partial_u \phi - \partial_v (K \circ \phi)\partial_u \phi$$

Ohne Einschränkung sei nach geeigneter Wahl der Koordinaten

$$\partial_u \phi = a e_1, \ \partial_v \phi = b e_1 + c e_2$$

mit $a, c > 0, \ b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \partial_u h - \partial_v g \quad &= (DK \circ \phi)\partial_u \phi \partial_v \phi - (DK \circ \phi)\partial_v \phi \partial_u \phi \\
&= a(\partial_x K \circ \phi)\left(b e_1 + c e_2\right) - \left(b \partial_x K \circ \phi + c \partial_y K \circ \phi\right) \cdot a e_1 \\
&= ab \partial_x P \circ \phi + ac \partial_x Q \circ \phi - ab \partial_x P \circ \phi - ac \partial_y P \circ \phi \\
&= ac(\partial_x Q - \partial_y P) \circ \phi
\end{aligned}$$

Weiter ist $\partial_u \phi \times \partial_v \phi = ac e_3$

$$\Rightarrow \quad (\operatorname{rot} K \circ \phi) \cdot (\partial_u \phi \times \partial_v \phi) == ac\left(\partial_x Q - \partial_y P\right) \circ \phi$$

Aus der Behauptung folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot} K \cdot n \ \mathrm{d}\sigma \quad &= \int_\Omega (\operatorname{rot} K \circ \phi) \cdot \frac{\phi_u \times \phi_v}{||\phi_u \times \phi_v||} \, ||\phi_u \times \phi_v|| \ \mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Omega (\partial_u h - \partial_v g) \ \mathrm{d}\mu \\
&\overset{\text{Green}}{=} \int_\Omega g \ \mathrm{d}u + h \ \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

und damit der Satz.

$\square$

5.8 Der Satz von Gauss in $\mathbb{R}^3$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und sei $K \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$.

Definition 5.8.1. *Der Ausdruck*

$$\mathit{div}\, K = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial K_i}{\partial x_i} \qquad \mathit{mit} \qquad K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

heisst die Divergenz von K.

Satz 5.8.1 (Gauss)**.** *Sei $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset W \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt und von der Klasse PC^1. Dann gilt:*

$$\int_\Omega \mathit{div}\, K \,\mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} K \cdot n \,\mathrm{d}\sigma.$$

Beweis. **i)** Sei Ω ein Normalbereich und ohne Einschränkung sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ Quader, $0 \leq \psi \leq C^1(\overline{Q})$ und

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \ (x_1, x_2) \in Q, \ 0 \leq x_3 \leq \psi(x_1, x_2)\}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial K_3}{\partial x_3} \,\mathrm{d}\mu \quad &= \int_Q \left(\int_0^{\psi(x_1,x_2)} \frac{\partial K_3}{\partial x_3} \,\mathrm{d}x_3 \right) \,\mathrm{d}\mu(x_1, x_2) \\ &= \int_Q \left(K_3(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) - K_3(x_1, x_2, 0) \right) \,\mathrm{d}\mu(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Sei $\phi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) \in C^1(Q, \mathbb{R}^3)$ die von ψ induzierte Parametrisierung des „oberen" Teils $S = \phi(Q)$ von $\partial\Omega$ mit

$$D\phi = (\partial_1\phi, \partial_2\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1\psi & \partial_2\psi \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\partial_1\phi \times \partial_2\phi = \begin{pmatrix} -\partial_1\psi \\ -\partial_2\psi \\ 1 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_3 \end{pmatrix} \cdot n \,\mathrm{d}\sigma &= \int_Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_3 \circ \phi \end{pmatrix} \cdot (\partial_1\phi \times \partial_2\phi) \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_Q K_3\left(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)\right) \,\mathrm{d}\mu(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

Analog gilt für den „unteren “ Teil $Q \times \{0\}$ von $\partial\Omega$ mit $n = -e_3$:

$$\int_{Q\times\{0\}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_3 \end{pmatrix} \cdot n \,\mathrm{d}\sigma = -\int_Q K_3\left(x_1, x_2, 0\right) \,\mathrm{d}\mu(x_1, x_2)$$

Also gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_3 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_3 \end{pmatrix} \cdot n \,\mathrm{d}\sigma$$

Analog argumentiert man für die Komponenten K_1 und K_2.

ii) Allgemeiner Fall:
Zerlege Ω in endlich viele disjunkte Normalbereiche $\Omega_1, .., \Omega_L$. Dann folgt:

$$\int_\Omega \operatorname{div} K \,\mathrm{d}\mu = \sum_{l=1}^{L} \int_{\Omega_l} \operatorname{div} K \,\mathrm{d}\mu = \sum_{l=1}^{L} \int_{\partial\Omega_l} K \cdot n \,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega} K \cdot n \,\mathrm{d}\sigma$$

□

Bemerkung: Sei $K \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3\right)$ mit $K = 0$ auf $\partial\Omega$, dann gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} K \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Beispiel:

(1) Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ für $K(x) = x$ gilt $\operatorname{div} K = 3$ und damit

$$\begin{aligned}
3\mu_3\left(B_1(0)\right) &= \int_{B_1(0)} \operatorname{div} K \, \mathrm{d}\mu \\
&\overset{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial B_1(0)} K \cdot n \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{S^2} x \cdot x \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{S^2} \mathrm{d}\sigma \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\mu_3(B_1(0)) = \frac{4}{3}\pi.$$

(2) Sei

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\right\}$$

Für $K(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ gilt $\operatorname{div} K = 1$ und damit

$$\mu_3(\Omega) = \int_\Omega \operatorname{div} K \, \mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} K \cdot n \, \mathrm{d}\sigma = 2 \int_{\partial\Omega^+} K \cdot n \, \mathrm{d}\sigma$$

Sei $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}$. Dann gilt

$$\partial\Omega^+ = \phi(E)$$

mit

$$\phi(x, y) = \left(x, y, \underbrace{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}_{=\psi(x,y)} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_x \phi \times \partial_y \phi = \begin{pmatrix} ... \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mu_3(\Omega) &= 2\int_E (K\circ\phi)\cdot(\partial_x\phi\times\partial_y\phi)\ \mathrm{d}\mu(x,y)\\ &= 2c\int_{\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\right\}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\ \mathrm{d}\mu(x,y)\end{aligned}$$

Betrachte Diffeomorphismus $\varphi:\ B_1(0)\subset\mathbb{R}^2\to E,\ \varphi(x,y)=(xa,yb)$, $|\det D\varphi|=ab$

$$\begin{aligned}\mu_3(\Omega) &= 2abc\int_{B_1(0)}\sqrt{1-x^2-y^2}\ \mathrm{d}\mu(x,y)\\ &= 2abc\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\\ &= 2\pi abc\int_0^1\sqrt{1-s}\ \mathrm{d}s\\ &= 2\pi abc\left[-\frac{2}{3}(1-s)^{\frac{3}{2}}\right]_{s=0}^{s=1}\\ &= \frac{4}{3}\pi abc\end{aligned}$$

(3) Sei

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2}<1-z,\ z>0\right\}$$

mit

$$\begin{aligned}M &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\sqrt{x^2+y^2}=1-z\le 1\right\}\\ &= \left\{(x,y,\psi(x,y)):\ \psi(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}\right\}\end{aligned}$$

Wähle $K=e_3$ mit

$$\operatorname{div}K=0$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \operatorname{div} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\mu \\
&= \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot n \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot n \, \mathrm{d}\sigma + \int_{B_1(0)\times\{0\}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{n}_{=-e_3} \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot n \, \mathrm{d}\sigma - \mu_2\left(B_1(0)\right)
\end{aligned}$$

Jetzt berechnen wir n für M:

$$n = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x \psi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y \psi \end{pmatrix}}{\sqrt{1 + |\nabla \psi|^2}}$$

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \psi|^2}}$$

und mit $\nabla\psi(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$ folgt $|\nabla\psi|^2 = 1$, also

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Damit folgt $\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_2(M) = \mu_2(B_1(0))$ und somit

$$\mu_2(M) = \sqrt{2}\pi.$$

(4) Sei $O \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt mit C^1-Rand und $q \in \mathbb{R}$. Definiere $v(x) = q\frac{x}{||x||^3} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^3)$.

Sei $r > 0$ und $B_r(0) \subset \Omega$

$$\Rightarrow \quad \int_{\Omega \backslash B_r(0)} \operatorname{div} v \, \mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} v \cdot n \, \mathrm{d}\sigma - \int_{\partial B_r(0)} v \cdot \frac{x}{||x||} \, \mathrm{d}\sigma$$

Es gilt: $\operatorname{div} v = 0$ auf $\Omega \backslash B_r(0)$ und damit

$$\int_{\partial\Omega} v \cdot n \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial B_r(0)} v \cdot \frac{x}{||x||} \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial B_r(0)} \frac{q}{||x||^2} \, \mathrm{d}\sigma = \frac{q}{r^2} \mu_2(\partial B_r(0)) = 4\pi q.$$

5.9 Partielle Integration und harmonische Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt mit $\partial\Omega \in PC^1$, $K = (K_i)_{1 \leq i \leq 3} \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3\right)$, $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt

$$\operatorname{div}(fK) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} K_i + f \frac{\partial K_i}{\partial x^i} \right) = \nabla f \cdot K + f \operatorname{div} K$$

Aus dem Satz von Gauss folgt daher direkt der

Satz 5.9.1. *(Partielle Integration) Für Ω, K, f wie oben gilt*

$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot K \, \mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} (fK) \cdot n \, \mathrm{d}\sigma - \int_{\Omega} f \, div K \, \mathrm{d}\mu$$

Bemerkung: Der Satz gilt in allen Dimensionen.
Besonders interessant ist der Fall $K = \nabla u$ mit $u \in C^2(\overline{\Omega})$. In diesem Fall haben wir

$$\operatorname{div} K = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2} = \Delta u.$$

Sei jetzt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\partial\Omega \subset PC^1$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Definition 5.9.1. *Eine Funktion u heisst harmonisch, falls $\Delta u = 0$.*

Beispiel:

(1) Sei $u(x) = \dfrac{1}{||x||} \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}\right)$ mit

$$\nabla u = -\frac{x}{||x||^3}, \; x \neq 0$$

wie zuvor gezeigt wurde gilt $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, d.h. u ist harmonisch.

(2) Sei $n = 2,\ u \in C^\infty(\mathbb{R}^2),\ u(x,y) = \mathrm{e}^x \sin(y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$
Es gilt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -u,\ \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Definition 5.9.2. *Für $v \in C^1(\overline{\Omega})$ sei*

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega ||\nabla v||^2 \ \mathrm{d}\mu$$

die Dirichlet-Energie von v.

Satz 5.9.2. *(Variationelle Charakterisierung harmonischer Funktionen) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\partial\Omega \in PC^1,\ u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Dann sind äquivalent*

i) $\Delta u = 0$

ii) $E(u) = \min\left\{E(v) :\ v \in C^1(\overline{\Omega}),\ v = u \textit{ auf } \partial\Omega\right\}$

Beweis. **i) ⇒ ii)** Sei u harmonisch und $v \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $v = u$ auf $\partial\Omega$. Setze

$$\varphi = v - u \in C^1(\overline{\Omega})$$

mit $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$. Mit

$$||\nabla(u+\varphi)||^2 = ||\nabla u||^2 + 2\nabla u \cdot \nabla\varphi + ||\nabla\varphi||^2$$

folgt

$$E(v) = E(u+\varphi) = \frac{1}{2}\int_\Omega ||\nabla(u+\phi)||^2 \ \mathrm{d}\mu = E(u) + E(\varphi) + \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \,\mathrm{d}\mu \quad (*)$$

Wir setzen $\nabla u =: K$ und beachten, dass $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$ und $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u$.
Aus Satz 5.9.1 folgt

$$\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \,\mathrm{d}\mu = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \varphi\nabla u \cdot n \,\mathrm{d}\sigma}_{=0,\text{ da } \varphi=0 \text{ auf } \partial\Omega} - \underbrace{\int_\Omega \varphi \operatorname{div}(\nabla u) \,\mathrm{d}\mu}_{=0,\text{ da } \Delta u=0} = 0$$

Also $E(v) = E(u) + E(\varphi) \geq E(u)$.

ii) ⇒ i) Betrachte $v := u + t\varphi$, wobei $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega,\ t \in \mathbb{R}$.
Nach Annahme gilt:

$$\forall\, t \in \mathbb{R} :\ E(u + t\varphi) \geq E(u)$$

Mit $(*)$ folgt

$$E(u+t\varphi) = E(u) + t\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \,\mathrm{d}\mu + \underbrace{t^2 E(\varphi)}_{=E(t\phi)}$$

Mit Satz 5.9.1 folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|_{t=0}\, E(u+t\varphi) \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \,\mathrm{d}\mu \\ &= \underbrace{\int_{\partial U} \varphi \nabla u \cdot n \,\mathrm{d}\sigma}_{=0, \text{ da } \varphi=0 \text{ auf } \partial\Omega} - \int_\Omega \varphi \Delta u \,\mathrm{d}\mu \\ &= -\int_\Omega \varphi \Delta u \,\mathrm{d}\mu \quad (**) \end{aligned}$$

Angenommen $\exists\, x_0 \in \Omega$ mit $\Delta u(x_0) \neq 0$ und ohne Einschränkung sei $\Delta u(x_0) > 0$. Da $u \in C^2(\Omega)$, gibt es $r > 0$ mit $\Delta u > 0$ in $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$.
Wähle $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\frac{||x-x_0||^2}{r^2}}\right), & x \in B_r(x_0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar gilt $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ und $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$ und

$$\int_\Omega \varphi \Delta u > 0$$

Widerspruch zu (**) $\quad\Rightarrow\quad$ u harmonisch

$\square$

Setze $C_0^1(\Omega) = \left\{\varphi \in C^1(\overline{\Omega}) :\ \varphi = 0 \text{ in einer Umgebung von } \partial\Omega\right\}$. Der Beweis von 5.9.2 zeigt:

Satz 5.9.3. *Für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ sind äquivalent:*

i) *u ist harmonisch, $\Delta u = 0$*

ii) $\forall\, \varphi \in C_0^1(\Omega) : \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \,\mathrm{d}\mu = 0.$

Bedingung ii) heisst schwache Form der Gleichung $\Delta u = 0$.

Transformation des Dirichlet-Integrals

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$ ein Diffeomorphismus von U auf $V = \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\psi = \phi^{-1} \in C^2(V, \mathbb{R}^n)$. Sei weiter $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$ beschränkt mit $\partial\Omega$ von der Klasse PC^1 und sei $\Omega' = \phi(\Omega) \subset V$. Betrachte $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ und $v = u \circ \psi \in C^2(\Omega') \cap C^1(\overline{\Omega'})$.
Wir berechnen

$$\begin{aligned}
||\nabla v||^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial (u \circ \psi)}{\partial y^i} \right|^2 \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x^j} \circ \psi \right) \frac{\partial \psi^j}{\partial y^i} \left(\frac{\partial u}{\partial x^k} \circ \psi \right) \frac{\partial \psi^k}{\partial y^i} \\
&= \sum_{j,k=1} \left(h^{jk} \frac{\partial u}{\partial x^j} \frac{\partial u}{\partial x^k} \right) \circ \psi,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
h &= (h^{jk})_{1 \le j,k \le m} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi^j}{\partial y^i} \frac{\partial \psi^k}{\partial y^i} \right) \circ \phi \right)_{1 \le j,k \le n} \\
&= (D\psi \cdot D\psi^T) \circ \phi \\
&= (D\phi)^{-1} (D\phi^T)^{-1}
\end{aligned}$$

Anmerkung:

$$\psi \circ \phi = id_u \quad \Rightarrow \quad (D\psi \circ \phi) \cdot D\phi = E_n \quad \Rightarrow \quad D\psi \circ \phi = (D\phi)^{-1}$$

und damit ist

$$h = g^{-1},$$

wobei g die Gramsche Matrix ist:

$$g = D\phi^T \cdot D\phi = (g_{ij})_{1 \le i,j \le n} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^k}{\partial x^j} \right)_{ij}$$

Wir schreiben $h = g^{-1} =: (g^{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

Mit dem Transformationssatz und $|\det(D\phi)| = \sqrt{\det(g)}$ folgt

$$\begin{aligned} 2E(v) &= \int_\Omega ||\nabla v||^2 \, \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\phi(\Omega)} \left(\left(g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) \circ \psi \right) \, \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^j} \sqrt{\det(g)} \, \mathrm{d}\mu \\ &=: 2E_g(u). \end{aligned}$$

Analog haben wir mit $\sqrt{|g|} := \sqrt{\det g}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad E(v+\varphi_1) &= E(v) + E(\varphi_1) + \int_{\Omega'} \nabla v \nabla \varphi_1 \, \mathrm{d}\mu \\ &= E_g(u+\varphi) \\ &= E_g(u) + E_g(\varphi) + \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \sqrt{|g|} \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\int_{\Omega'} \nabla v \nabla \varphi_1 \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \sqrt{|g|} \, \mathrm{d}\mu$$

Satz 5.9.4. *Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $u = v \circ \phi$ mit $v \in C^2(\Omega') \cap C^1(\overline{\Omega}')$. Es sind äquivalent:*

(1) v ist harmonisch: $\Delta v = 0$.

(2) Es gilt $\forall\, \varphi \in C_0^1(\Omega)$: $\displaystyle\int_\Omega g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \sqrt{|g|} \, \mathrm{d}\mu = 0$

(3) u erfüllt die Gleichung: $\displaystyle\Delta_g u := \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) = 0$

Bemerkung: Der Operator Δ_g heisst Laplace-Beltrami Operator.

Beweis. **1) ⇔ 2)** Aus Satz 5.9.2 folgt: $\Delta v = 0$ ist äquivalent zur Minimalität von $E(v)$ und damit auch zur Minimalität von $E_g(u)$. Analog zum Beweis von Satz 5.9.2 folgt die Bedingung 2).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_g(u + t\varphi) \mid_{t=0} = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

Genauso argumentiert man für die umgekehrte Richtung.

2) $\Leftrightarrow$ 3) Aus 2) folgt zusammen mit Satz 5.9.1

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\,\mathrm{d}\mu &= -\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)\varphi\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}\mu \\ &= -\int_\Omega \Delta_g u\varphi\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

□

Beispiel: Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$.
Wähle

$$U = \{(r,\theta) : r > 0, -\pi < \theta < \pi\}\,,\ V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) :\ x_1 \leq 0\}$$

und sei $\phi \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$ die Abbildung

$$\phi : \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \quad , \phi(U) = V$$

Es gilt:

$$D\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \qquad g &= (D\phi)^T(D\phi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \sqrt{|g|} &= \sqrt{\det g} \\ &= r \\ \Rightarrow \quad g^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Für $u = v \circ \phi \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega}),\ \Omega \subset U$ gilt:

$$E_g(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^j}\,|g|\ \mathrm{d}\mu = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 + \frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|^2\right) r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$$

und

$$\begin{aligned}
\Delta_g u &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial}{\partial x^i} u \right) \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} u \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r^{-2} r \frac{\partial}{\partial \theta} u \right) \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} u \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}
\end{aligned}$$

Bemerkung: $u = u(r) = \log r,\ r > 0$ erfüllt $\Delta_g u = 0 \quad \Rightarrow \quad v(x) = \log |x|$ ist harmonisch auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$

6 Funktionentheorie

Im Folgenden sei Ω stets eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

6.1 Cauchy'scher Integralsatz

Definition 6.1.1. *Eine Funktion $f:\ \Omega \to \mathbb{C}$ heisst komplex differenzierbar in $z \in \Omega$ mit Ableitung $f'(z) = c \in \mathbb{C}$, falls gilt:*

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = c$$

f heisst komplex differenzierbar oder holomorph auf Ω, wenn f in allen $z \in \Omega$ komplex differenzierbar ist.

Bemerkungen: Wie im Reellen beweist man:

(1) Differenzierbarkeit in $z_0 \quad \Rightarrow \quad$ Stetigkeit in z_0

(2) Für $f, g :\ \Omega \to \mathbb{C},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt: $\quad (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

(3) Produktregel: $f, g :\ \Omega \to \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad (f \cdot g)' = f'g + fg'$

(4) Quotientenregel: $f, g :\ \Omega \to \mathbb{C},\ g \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

(5) Kettenregel: $U, V \in \mathbb{C}$ offen, $f :\ U \to V,\ g : V \to \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad (g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$

Bemerkung: Eine Funktion $f :\ \Omega \to \mathbb{C}$ kann äquivalent als Funktion $f :\ \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ interpretiert werden. Dann gilt:

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

mit $u(x, y) = Re\,(f(x + iy))\,,\ v(x, y) = Im\,(f(x + iy))$

Satz 6.1.1. *Für $f :\ \Omega \to \mathbb{C},\ f = u + iv$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) f ist auf Ω komplex differenzierbar.

(2) $f: \Omega \to \mathbb{R}^2$ ist (reell) differenzierbar mit

$$\partial_x u = \partial_y v \text{ und } \partial_x v = -\partial_y u$$

(Cauchy-Riemann Differentialgleichungen)

Bemerkung: f komplex differenzierbar, $f = u + iv \;\Rightarrow\; u, v$ harmonisch, denn

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_x (\partial_y v) - \partial_y (\partial_x v) = 0, \text{ falls } u, v \in C^2(\Omega)$$

$$\Delta v = \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = -\partial_x (\partial_y u) + \partial_y (\partial_x u) = 0$$

Beispiel: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \overline{z} = x - iy$ ist nicht komplex differenzierbar, denn mit

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = x,\ v(x,y) = -y$$

gilt

$$\partial_x u = 1 \neq -1 = \partial_y v$$

und damit sind die Cauchy-Riemann Gleichungen nicht erfüllt.

Bemerkung: Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl c ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, genauer gilt für $c = a + ib$

$$cz = Cz \quad \text{mit} \quad C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\left(cz = (a+ib)(x+iy) = ax - by + i(bx + ay),\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} \right)$$

Beweis. „$\Rightarrow$“:

Sei f differenzierbar mit $f'(z) = c$. Dann gilt

$$\Rightarrow \quad \frac{f(w) - f(z) - C(w-z)}{|w-z|} = \underbrace{\frac{f(w) - f(z) - c(w-z)}{w-z}}_{\to 0 \text{ für } w \to z} \frac{w-z}{|w-z|} \to 0$$

für $w \to z$ und damit ist f reell differenzierbar mit

$$Df(z) = C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Da aber auch gilt

$$Df(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

folgt insgesamt das f reell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt sind.

„$\Leftarrow$ “:

Sei jetzt f reell differenzierbar und seien die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt. Dann gilt

$$\Rightarrow \quad Df(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

und für $c = a + ib$ folgt

$$\frac{f(w) - f(z) - c(w-z)}{w-z} = \frac{f(w) - f(z) - Df(z)(w-z)}{|w-z|} \frac{|w-z|}{w-z} \to 0$$

für $w \to z$. □

Definition 6.1.2. *Sei $I = [a, b]$, $\Omega \in \mathbb{C}$ offen und $f \in C^0(\Omega, \mathbb{C})$. Für $\gamma \in PC^1\left([a,b], \Omega\right)$ definieren wir das komplexe Kurvenintegral*

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}z = \int_a^b f\left(\gamma(t)\right) \gamma'(t) \, \mathrm{d}t$$

mit

$$\int_I (u+iv)(t) \, \mathrm{d}t = \int_I u(t) \, \mathrm{d}t + i \int_I v(t) \, \mathrm{d}t$$

Bemerkung: Sei $f = u + iv,\ u, v \in C^0(\Omega),\ I = [a, b]$ und $\gamma = x + iy$ mit $x, y \in PC^1\left(I\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_I (f \circ \gamma)\gamma' &= \int_I \left((u+iv) \circ \gamma\right)\left(x' + iy'\right) \\ &= \int_I \left((u \circ \gamma)x' + (v \circ \gamma)y'\right) + \left((v \circ \gamma)x' + (u \circ \gamma)y'\right) \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}z = \int_\gamma (u \,\mathrm{d}x - v \,\mathrm{d}y) + i \int_\gamma (v \,\mathrm{d}x + u \,\mathrm{d}y)$$

Beispiel: Seien $z_0 \in \mathbb{C},\ r > 0$ und

$$\gamma :\ [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{0\},\ \gamma(\theta) = z_0 + r\mathrm{e}^{i\theta}$$

Es gilt $\gamma'(\theta) = ir\mathrm{e}^{i\theta}$ und für $k \in \mathbb{Z}$ und $f(z) = (z - z_0)^k$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_\gamma (z - z_0)^k \,\mathrm{d}z \quad &= \int_0^{2\pi} r^k \mathrm{e}^{ik\theta} ir\mathrm{e}^{i\theta} \,\mathrm{d}\theta \\ &= ir^{k+1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(k+1)\theta} \,\mathrm{d}\theta \\ &= \begin{cases} 2\pi i, & k = -1 \\ ir^{k+1} \left[\dfrac{\mathrm{e}^{i(k+1)\theta}}{i(k+1)} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0, & k \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Für $k = -1$ gilt mit $z = x + iy,\ z_0 = 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2},\ Im\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}y + i\left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}y\right)$$

Es gilt also:

$$\int_\gamma W \cdot \mathrm{d}\vec{x} = Im \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi$$

Der Realteil von $\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$ ist exakt, denn es gilt:

$$\frac{x}{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\lambda$$

mit

$$\lambda(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Damit folgt

$$0 = \int_\gamma \mathrm{d}\lambda = Re \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Insgesamt erhalten wir wieder

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i.$$

Satz 6.1.2 (Cauchy I)**.** *Die Funktion $f: \Omega \to \mathbb{C}$ sei stetig partiell differenzierbar und holomorph. Ist $\gamma \in PC^1(I, \Omega)$ geschlossen homotop zu einer konstanten Kurve, so folgt*

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}z = 0$$

Beweis. Mit den Resultaten aus Kapitel 3 erhalten wir die Behauptung falls die 1-Formen

$$u \, \mathrm{d}x - v \, \mathrm{d}y \text{ und } u\mathrm{d}y + v \, \mathrm{d}x$$

geschlossen sind. Dies folgt aber sofort aus den Cauchy-Riemann Gleichungen. □

Lemma 6.1.1 (Goursat)**.** *$\Omega \subset \mathbb{C}$ sei nicht leer, offen und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Zu drei Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \Omega$ durchlaufe die geschlossene Kurve $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ den Rand des von z_1, z_2, z_3 aufgespannten Dreiecks, das ganz in Ω enthalten sei. Dann gilt:*

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$$

Beweis. Wir konstruieren iterativ Teildreiecke, welche gegen $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergieren und nutzen dann die Holomorphie von f in z_0.
Wir zerlegen das Dreieck z_1, z_2, z_3 in 4 Teildreiecke:

$$z_1, \frac{z_1 + z_2}{z}, \frac{z_1 + z_3}{2}; \quad \frac{z_1 + z_2}{2}, z_2, \frac{z_2 + z_3}{2};$$

$$\frac{z_2 + z_3}{2}, z_3, \frac{z_1 + z_3}{2}; \quad \frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}, \frac{z_1 + z_3}{2}$$

Es folgt:

$$\int_{\Delta^0} f \, (\mathrm{d}z) = \int_{\Delta^1} f \, \mathrm{d}z + \int_{\Delta^2} f \, \mathrm{d}z + \int_{\Delta^3} f \, \mathrm{d}z + \int_{\Delta^4} f \, \mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \quad \exists k \in \{1, 2, 3, 4\} : \left| \int_{\Delta^0} f \, \mathrm{d}z \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\Delta^k} f \, \mathrm{d}z \right|$$

Jetzt machen wir denselben Schritt mit Δ^k statt mit Δ^0.
Nach l Schritten erhalten wir ein Dreieck Δ_l mit

$$\left| \int_{\Delta^0} f \, \mathrm{d}z \right| \leq 4^l \left| \int_{\Delta_l} f \, dz \right|$$

und

$$L_{\Delta_l} = 2^{-l} L_{\Delta^0} \quad (L = \text{Umfang})$$

Die Eckpunkte, der so konstruierten Dreiecke bilden eine Cauchy-Folge und konvergieren gegen einen Punkt $z_0 \in \Omega$. Da f in z_0 holomorph ist, gilt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varphi_{z_0}(z) \quad \forall\, z \in \Omega$$

mit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\varphi_{z_0}(z)}{z - z_0} = 0.$$

Also gilt:

$$\left| \int_{\Delta^0} f \,\mathrm{d}z \right| = 4^l \left| \int_{\Delta_l} \left(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varphi_{z_0}(z) \right) \,\mathrm{d}z \right| = 4^l \left| \int_{\Delta_l} \varphi_{z_0}(z) \,\mathrm{d}z \right|,$$

denn $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ ist holomorph und stetig partiell differenzierbar, also verschwindet das Kurvenintegral dieser linearen Funktion nach dem Satz von Cauchy. Für alle $\varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ und $l \in \mathbb{N}$ mit

$$|\varphi_{z_0}(z)| \leq \varepsilon\, |z - z_0| \quad \forall\, z \in B_\delta(z_0)$$

und weiter ist

$$\Delta_l \subset B_\delta(z_0).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \left| \int_{\Delta^0} f \,\mathrm{d}z \right| &\leq 4^l \sup_{z \in \Delta_l} |\varphi_{z_0}(z)|\, L_{\Delta_l} \\ &\leq 4^l \varepsilon \sup_{z \in \Delta_l} |z - z_0|\, L_{\Delta_l} \\ &= L_{\Delta^0} \varepsilon. \end{aligned}$$

Da ε beliebig war folgt daraus die Behauptung. □

Satz 6.1.3. *Jede holomorphe 1-Form (d.h. $\omega = f\,\mathrm{d}z$ mit f holomorph) ist lokal exakt.*

Beweis. Sei $a \in \Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Da Ω offen ist, existiert eine konvexe Umgebung von a in Ω (z.B ein kleiner Ball). Nach Satz 6.1.2 gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z) \,\mathrm{d}z = 0$$

für alle Dreiecke $\Delta \subset K$.

Jetzt definieren wir für $z \in K$ die Funktion

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi,$$

wobei $[a,z]$ die Verbindungsgerade von a nach z bezeichnet.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
F(z+h) - F(z) &= \int_{[a,z+h]} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi - \int_{[a,z] f(\xi)}\ \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{[a,z+h]} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + \int_{[z+h,z]} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + \int_{[z,a]} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi - \int_{[z+h,z]} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{[z,z+h]} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

da das Integral über das Dreieck $[a,z+h]$, $[z+h,z]$, $[z,a]$ verschwindet.

Aus $f(z) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{[z,z+h]} f(z)\ \mathrm{d}\xi$ folgt weiter

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} \left(f(\xi) - f(z)\right)\ \mathrm{d}\xi \right| \\
&\leq \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} \left|f(\xi) - f(z)\right|\ \mathrm{d}\xi \\
&\leq \max_{\xi \in [z,z+h]} \left|f(\xi) - f(z)\right| \\
&\to 0
\end{aligned}$$

für $h \to 0$. Damit erhalten wir

$$F'(z) = f(z).$$

□

Korollar 6.1.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f\,\mathrm{d}z$ sei eine holomorphe 1-Form. Dann gelten:*

i) *Sind γ_0, γ_1 homotop mit gleichem Anfangs- und Endpunkt oder geschlossen homotop, dann ist*

$$\int_{\gamma_0} f\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f\ \mathrm{d}z$$

Speziell ist $\displaystyle\int_\gamma f\ \mathrm{d}z = 0$, falls γ geschlossen homotop zu einer konstanten Kurve ist.

ii) *Ist Ω einfach zusammenhängend, so ist $f\,\mathrm{d}z$ exakt und*

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

mit $a \in \Omega$ ist F eine holomorphe Stammfunktion von f.

Beispiele:

i) Die Funktion $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und die Kurven γ_1, γ_2 und $-\gamma_3$, gegeben durch

- $\gamma_1(t) = t$, $0 \leq t \leq r$,
- $\gamma_2(t) = r + ti$, $0 \leq t \leq r$ und
- $\gamma_3(t) = (1+i)t$, $0 \leq t \leq r$

bilden ein geschlossenes Dreieck in $\mathbb{C}$. Speziell gilt nach Satz 6.1.2 also

$$\int_{\gamma_1} f\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_3} f\,\mathrm{d}z.$$

Nun berechnen wir die einzelnen Integrale. Wir beginnen mit γ_2:

Es gilt

$$\gamma_2'(t) = i$$

und

$$|f(\gamma_2(t))| = \left|\mathrm{e}^{-(r+ti)^2}\right| = \left|\mathrm{e}^{-r^2+t^2}\mathrm{e}^{-2rti}\right| = \mathrm{e}^{t^2-r^2} \leq \mathrm{e}^{tr}\mathrm{e}^{-r^2}$$

da $t \leq r$. Also folgt

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2} f\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^r f(\gamma_2(t))\,\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \mathrm{e}^{-r^2}\int_0^r \mathrm{e}^{tr}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-r^2}\left[\frac{1}{r}\mathrm{e}^{tr}\right]_{t=0}^{t=r} \\ &= \frac{1}{r}\left(1-\mathrm{e}^{-r^2}\right) \\ &\to 0.\end{aligned}$$

für $r \to \infty$

Für das Kurvenintegral längs γ_1 erhalten wir mit $\gamma_1'(t) = 1$

$$\int_{\gamma_1} f \, \mathrm{d}z = \int_0^r \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

und damit folgt aus den obigen Gleichungen

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_3} f \, \mathrm{d}z = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Zu guter letzt formen wir noch das Integral längs γ_3 um:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3} f \, \mathrm{d}z \quad &= (1+i) \int_0^r \mathrm{e}^{-(1+i)^2 t^2} \, \mathrm{d}t \\
&= (1+i) \int_0^r \mathrm{e}^{-2it^2} \, \mathrm{d}t \\
\text{(Substitution: } \tau = \sqrt{2}t,\ \mathrm{d}\tau &= \sqrt{2}\,\mathrm{d}t) \\
&= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}r} \mathrm{e}^{-i\tau^2} \, \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_3} f \, \mathrm{d}z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-i\tau^2}$$

oder

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-i\tau^2} \, \mathrm{d}\tau = \frac{\sqrt{2}}{1+i} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1-i).$$

Durch Zerlegung des Integrals in Real- bzw. Imaginärteil folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \cos(\tau^2) \, \mathrm{d}\tau &= Re \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-it^2} \, \mathrm{d}t \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \\
\int_0^\infty \sin(\tau^2) \, \mathrm{d}\tau &= -\, Im \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-it^2} \, \mathrm{d}t \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.
\end{aligned}$$

ii) Für alle reellen Zahlen $x > 0$ gilt $\log x = \int_1^x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$. Wir wollen jetzt einen komplexen Logarithmus definieren. Dazu bemerken wir, dass die 1-Form $\frac{d\xi}{\xi}$ holomorph auf $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \backslash \{-x, x \geq 0\}$ ist und die Menga $\mathbb{C}^-$ ist einfach zusammenhängend.
Also ist die Funktion

$$L(z) = \int_{[1,z]} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}$$

nach den Resultaten in Kapitel 3 wohldefiniert und holomorph mit Ableitung $\frac{1}{z}$. Weiter gilt $L(1) = 0$.

Jetzt berechnen wir

$$(z\exp(-L(z)))' = \exp(-L(z)) - \exp(-L(z)) = 0$$

Also ist

$$z\exp(-L(z)) = 1 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

und damit gilt

$$\exp(L(z)) = z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Das heiṡst, L ist die Umkehrfunktion von exp.
L heiṡst Hauptzweig des Logarithmus.
Sei nun $z = r\exp(i\theta)$. Integriert man die 1-Form $\dfrac{d\xi}{\xi}$ längs der Wege γ_1 und γ_2 mit

- $\gamma_1(t) = t,\ 1 \leq t \leq r,$
- $\gamma_2(t) = r\exp(it),\ 0 \leq t \leq \theta$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} L(z) &= \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} \\ &= \int_1^r \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_0^\theta \frac{ir\exp(it)}{r\exp(it)}\,\mathrm{d}t \\ &= \log r + i\theta. \end{aligned}$$

Also folgt in dieser Situation

$$L(z) = \log r + i\theta$$

6.2 Cauchy'sche Integralformel

Satz 6.2.1. *Sei f holomorph in einer Umgebung von $\overline{B_r(a)}$. Sei $\gamma(t) = a + r\mathrm{e}^{it},\ t \in [0, 2\pi]$. Dann gilt für alle $z \in B_r(a)$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Beweis. Da (für festes z) die Funktion $\xi \mapsto \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$ holomorph in $B_r(a)\backslash\{z\}$ ist, und da γ für alle $\varepsilon > 0$ in $B_r(a)\backslash\{z\}$ geschlossen homotop zu

$$\gamma_\varepsilon(t) = z + \varepsilon \exp(it),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

ist, gilt wegen Korollar 6.1.1

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Jetzt berechnen wir die beiden Integrale auf der rechten Seite. Aus dem Beispiel nach Definition 6.1.2 folgt

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = f(z)\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = 2\pi i f(z).$$

Da f holomorph ist, existiert für alle ε klein genug eine Zahl $M < \infty$, so dass

$$\frac{|f(\xi) - f(z)|}{|\xi - z|} \leq M \quad \forall\, \xi \in \partial B_\varepsilon(z).$$

Damit folgt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi\right| \leq \lim_{\varepsilon\to 0}(M2\pi\varepsilon) = 0.$$

Insgesamt folgt damit die Aussage des Satzes. □

Korollar 6.2.1 (Potenzreihenentwicklung)**.** *Sei $f:\ \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann kann f in jeder Kreisscheibe $B_r(a) \subset \overline{B_r(a)} \subset \Omega$ in eine Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

entwickelt werden, deren Konvergenzradius mindestens so gross ist, wie der Abstand von a zu $\partial\Omega$.
Die Koeffizienten sind

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi.$$

Ist $|f(\xi)| \leq M$ auf $\partial B_r(a)$, so gilt

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Beweis. Sei $0 < r_0 < r$. Dann ist für $\xi \in \partial B_r(a),\ z \in \partial B_{r_0}(a)$

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - a}\frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\xi - a}} = \frac{f(\xi)}{\xi - a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi - a}\right)^n$$

Die Konvergenz ist gleichmässig auf $\partial B_r(a)$, da $\left|\dfrac{z-a}{\xi-a}\right| = \dfrac{r_0}{r} < 1$.
Es folgt mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel

$$\begin{aligned} f(z) =& \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \\ =& \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(a)} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n \cdot \frac{f(\xi)}{\xi-a}\,\mathrm{d}\xi \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi}_{=:a_n} \cdot (z-a)^n. \end{aligned}$$

Da $r_0 < r$ beliebig war, folgt die Behauptung.
Nach der Standardabschätzung für Kurvenintegrale gilt

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\underbrace{L\left(\partial B_r(a)\right)}_{2\pi r} = \frac{M}{r^n}.$$

□

Korollar 6.2.2. *Jede holomorphe Funktion ist beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen sind wieder holomorph und sie erfüllen für $z \in B_r(a) \subset \overline{B_r(a)} \subset \Omega$:*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\xi$$

Beweis. Die erste Aussage folgt, da Ableitungen von Potenzreihen wieder Potenzreihen sind.
Sei $f(\xi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\xi - z)^n$ in einer Umgebung von z. Dann ist

$$\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{k-1} a_n(\xi-z)^{n-k-1} + \frac{a_k}{\xi - z} + \varphi(\xi)$$

mit $\varphi(z) = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n(\xi-z)^{n-k-1}$ holomorph.

Die Funktion $\xi \mapsto \sum\limits_{n=0}^{k-1} a_n(\xi-z)^{n-k-1}$ besitzt in $\mathbb{C}\backslash\{z\}$ die Stammfunktion.

$$\sum_{n=0}^{k-1} a_n \frac{(\xi-z)^{n-k}}{n-k}$$

Ihr Integral längs $\partial B_r(a)$ verschwindet also.
Das Integral von φ längs $\partial B_r(a)$ verschwindet, da φ holomorph ist (Cauchy-Integralsatz).

Es folgt mit Hilfe der Integralformel von Cauchy

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \, \mathrm{d}\xi = \int_{\partial B_r(a)} \frac{a_k}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi = 2\pi i \cdot a_k.$$

Andererseits ist $f^{(k)}(z) = k! a_k$ und damit folgt die Behauptung. □

Beispiele:

i) Sei Ω einfach zusammenhängend und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ohne Nullstellen. Dann gibt es einen holomorphen Logarithmus, das heisst eine holomorphe Funktion F mit $\exp(F) = f$.
Denn $\frac{f'}{f}$ ist holomorph, also gibt es nach dem Cauchy-Integralsatz eine holomorphe Stammfunktion Φ. Dann ist $\Phi' = \frac{f'}{f}$, also ist

$$(f \cdot \exp(-\Phi))' = \exp(-\Phi)\left(f' - f\Phi'\right) = 0,$$

das heisst

$$f = c \cdot \exp(\Phi) = \exp(\Phi + \gamma)$$

mit einer Konstanten $\exp(\gamma) = c$.
$F := \Phi + \gamma$ ist damit ein holomorpher Logarithmus.

ii) In der gleichen Situation sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann definiert

$$f^\alpha := \exp(\alpha F)$$

eine holomorphe Potenz.

Satz 6.2.2 (Morera)**.** *Sei $f : K \to \mathbb{C}$ stetig, $K \subset \mathbb{C}$ offene Kreisscheibe. Dann ist f genau dann holomorph, wenn*

$$\int_{\partial\Delta} f(z) \, \mathrm{d}z = 0 \quad (*)$$

für jedes Dreieck $\Delta \subset K$.

Beweis. Notwendigkeit der Bedingung ist klar (Satz von Goursat). Gilt $(*)$, so besitzt f eine holomorphe Stammfunktion F. Dann ist $f = F'$ holomorph. □

Satz 6.2.3 (Weierstrass)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ Folge holomorpher Funktionen und f_n konvergiere lokal gleichmässig gegen ein $f : \Omega \to \mathbb{C}$, d.h. $\forall\, z \in$*

Ω $\exists U \subset \Omega$ offen mit $z \in U$, so dass $f_n \to f$ gleichmässig auf U.
Dann gilt:

i) *f ist holomorph.*

ii) *f_n' konvergiert lokal gleichmässig gegen f'.*

Bemerkung: In $\mathbb{R}$ gilt: $f_n \in C^1, f_n \to f$ punktweise, $f_n' \to g$ gleichmässig, dann ist f stetig differenzierbar mit $f' = g$.

Beweis. **i)** Sei $a \in \Omega$ und $f_n \to f$ gleichmässig auf $\overline{B_r(a)}$ $\Rightarrow$ f ist stetig auf $\overline{B_r(a)}$.
Sei $\Delta \subset B_r(a)$ ein Dreieck.

$$\Rightarrow \quad \int_{\partial\Delta} f \,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n \,\mathrm{d}z = 0$$

$\Rightarrow$ f holomorph nach Morera.

ii) Sei $\overline{B_\rho(a)} \subset \Omega$. Wähle $r > \rho$ mit $\overline{B_r(a)} \subset \Omega$ und $f_n \to f$ gleichmässig auf $\overline{B_r(a)}$.
Mit Korollar 6.2.2 gilt:

$$f_n'(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^2} \,\mathrm{d}\xi \quad \forall\, z \in B_r(a)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in B_\rho(a)} \left|f_n'(z) - f'(z)\right| &\leq \sup_{z\in B_\rho(a)} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_r(a)} \frac{|f_n(\xi) - f(\xi)|}{|\xi - z|^2} \,\mathrm{d}\xi \\
&\leq \frac{1}{(r-\rho)^2} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_r(a)} |f_n(\xi) - f(\xi)| \,\mathrm{d}\xi \\
&\leq \frac{r}{(r-\rho)^2} \sup_{\rho\in\partial B_r(a)} |f_n(\xi) - f(\xi)| \\
&\to 0
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$.

□

Satz 6.2.4 (Identitätssatz für Potenzreihen)**.** *Sei $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius > 0 mit einem $a_\nu \neq 0$.*
Dann gibt es keine Folge $z_n \to 0,\ z_n \neq 0$, mit $f(z_n) = 0$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $a_0 = 1$.

Sei r der Konvergenzradius von f mit

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Ist $0 < \rho < r$, so gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$$

für hinreichend grosse n, das heisst $|a_n| < \dfrac{1}{\rho^n}$.
Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n| < \frac{M}{\rho^n}$$

mit einer Konstanten M.
Wähle $|z| < \dfrac{\varepsilon\rho}{2}$. Dann ist $|a_n z^n| < \dfrac{M}{\rho^n} \cdot \dfrac{\varepsilon^n \rho^n}{2^n} = \dfrac{M\varepsilon^n}{2^n}$. Also folgt

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\varepsilon^n}{2^n} = \frac{M\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n = \frac{M\varepsilon}{2} \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}} < 1$$

für ε hinreichend klein. Damit ist

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \neq 0$$

für alle z mit $|z| < \dfrac{\varepsilon\rho}{2}$ □

Bemerkung: Die Potenzreihen $f(z) = a_0 + a_1 z + ...$ und $g(z) = b_0 + b_1 z + ...$ haben den Konvergenzradius $r > 0$. Falls eine Nullfolge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $z_k \neq 0$ und $f(z_k) = g(z_k)\ \forall\ k$ existiert, so folgt $a_n = b_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Satz 6.2.5 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend, offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sei holomorph und $f \not\equiv 0$*

$$\Rightarrow \quad N = \{z \in \Omega : \ f(z) = 0\}$$

hat keinen Häufungspunkt in Ω.

Beweis. Sei H die Menge der Häufungspunkte von N in Ω.
Da f stetig ist, ist H abgeschlossen.
Ist $a \in H$, so besitzt f eine Potenzreihenentwicklung auf einem $B_r(a)$. Aus Satz 6.2.4 folgt dann $f = 0$ in $B_r(a)$, also ist H auch offen. Damit ist entweder $H = \emptyset$

oder $H = \Omega$.
Jedoch ist $H \neq \Omega$, da sonst $f \equiv 0$ wäre. Also bleibt nur die Möglichkeit $H = \emptyset$. $\square$

Korollar 6.2.3. *Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, Ω zusammenhängend.*

$$S = \{z \in \Omega : \ f(z) = g(z)\}$$

habe einen Häufungspunkt in $\Omega \ \Rightarrow \ f = g$.

Beispiel: Sei $\Omega = B_1(0)$. Für $z \in \Omega \cap \mathbb{R} = (-1, 1)$ gilt

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n.$$

Beide Seiten sind holomorph, und damit stimmen sie auch auf Ω überein.

Definition 6.2.1. *Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in \Omega$.*

- *a heisst einfache Stelle, falls $f'(a) \neq 0$.*
- *Ist $f'(a) = ... = f^{(k-1)}(a) = 0, \ f^{(k)} \neq 0$, so nennt man a eine k-fache Stelle.*

Der Punkt $a \in \mathbb{C}$ heisst (einfache, k-fache) w-Stelle, falls a einfache/k-fache Stelle und $f(a) = w$.

Bemerkung: Die Menge der einfachen/k-fachen w-Stellen hat keinen Häufungspunkt in Ω, da sonst $f \equiv w$ wäre und damit $f' \equiv 0$ auf Ω.

Satz 6.2.6. *Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $a \in \mathbb{C}$ einfache Stelle. Dann gibt es $U \subset \Omega$ offen mit $a \in U$ und $V \subset \mathbb{C}$ offen mit $f(a) \in V$, so dass $f : U \to V$ bijektiv und $f^{-1} : V \to U$ holomorph ist.*

Beweis. Folgt direkt aus dem Satz über inverse Funktionen, Satz 4.1.2. $\square$

Satz 6.2.7. *Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in \Omega$ sei eine k-fache Stelle. Dann gibt es $U \subset \Omega$ offen mit $a \in U$ und es gibt eine holomorphe Funktion $h : U \to B_r(0)$, so dass für alle $z \in U$ gilt:*

$$f(z) = b + (h(z))^k \,, \ b = f(a)$$

Beweis. Es gilt

$$f(z) - b = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^k \underbrace{\left(a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n (z-a)^{n-k} \right)}_{g(z)} = (z-a)^k g(z)$$

und g ist holomorph auf $B_\rho(a)$, g stetig und $g(a) \neq 0$. Damit sei ohne Einschränkung $g(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in B_\rho(a)$.
Sei $q = g^{\frac{1}{k}}$ eine k-te Wurzel.
Setze $h := (z-a)q$. Dann ist h holomorph mit $b + (h(z))^k = f(z)$. □

Definition 6.2.2. *Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, so heisst f ganze Funktion. Dann besitzt f eine Potenzreihendarstellung für alle $z \in \mathbb{C}$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Satz 6.2.8 (Liouville)**.** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Sei $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und es gilt wegen Korollar 3.2.1

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \forall\, r < \infty \quad \overset{r \to \infty}{\Rightarrow} \quad a_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

also ist $f(z) = a_0$. □

Satz 6.2.9 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Ist $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nicht konstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten, so existiert ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) = 0$.*

Beweis. Angenommen es gilt $P(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$.
Dann ist die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ holomorph auf $\mathbb{C}$.

Wir zeigen das f beschränkt ist, und erhalten dann mit Satz 6.2.8 einen Widerspruch.
Sei

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \text{ mit } a_n \neq 0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= \left| z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + ... + a_n \right) \right| \\
&\geq |z|^n \underbrace{\left(|a_n| - \frac{|a_0|}{|z|^n} - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} ... - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \right)}_{\geq \frac{|a_n|}{2} \text{ für } |z|>r,\ r \text{ gross}} \\
&\geq |z|^n \frac{|a_n|}{2} \\
&\geq r^n \frac{|a_n|}{2} \\
&> 0
\end{aligned}$$

für $|z| > r$ und $r > 0$ gross.
Da p stetig und strikt > 0 auf $\overline{B_r}(0)$ gilt weiter

$$|P(z)| \geq \varepsilon > 0.$$

Also ist $|P(z)|$ nach unten beschränkt durch das Minimum von ε und $r^n \frac{|a_n|}{2}$ und damit ist $|f(z)|$ konstant. $\square$

6.3 Der Residuensatz

Satz 6.3.1 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** *Sei $f : \Omega \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in U \backslash \{a\}$, wobei $U \subset \Omega$ eine Umgebung von a ist. Dann kann man f in a holomorph fortsetzen.*

Beweis. Definiere

$$\varphi(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & \text{für } z \in \Omega \backslash \{a\} \\ 0 & \text{für } z = a \end{cases}$$

Wegen

$$\varphi'(a) = \lim_{z \to a} \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{z - a} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$$

ist φ holomorph in Ω.

Also gibt es nach Korollar 6.2.1 eine Umgebung von a, so dass gilt:

$$\varphi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

da $\varphi(a) = \varphi'(a) = 0$.
Damit ist

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-2}$$

die gewünschte holomorphe Fortsetzung von f in a. □

Bemerkung: Gegenbeispiel auf $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Definition 6.3.1. *Für $0 \le r < R < \infty$ definieren wir den Kreisring:*

$$K_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z-a| < R\}.$$

Satz 6.3.2 (Integralformel für Kreisringe)**.** *Sei $U \supset K_{r,R}(a)$ und $f : \ U \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei*

$$\gamma_\rho(t) = a + \rho \cdot \mathrm{e}^{it}, \ 0 \le t \le 2\pi, \ r \le \rho \le R.$$

Dann gilt für alle $z \in K_{r,R}(a)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \,\mathrm{d}\xi.$$

Beweis. Wir definieren $\phi : \ U \to \mathbb{C}$ durch

$$\phi(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \text{für } \xi \neq z \\ f'(z) & \text{für } \xi = z. \end{cases}$$

Dann ist ϕ holomorph auf $U \backslash \{z\}$ und stetig in U. Wegen Satz 6.3.1 ist ϕ holomorph auf U.
Die Kurven γ_r und γ_R sind geschlossen homotop in U und damit gilt

$$\int_{\gamma_r} \phi \,\mathrm{d}z = \int_{\delta_R} \phi \,\mathrm{d}z$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} \phi \, \mathrm{d}z &= \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi - f(z) \int_{\gamma_R} \frac{1}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} - 2\pi i f(z)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r} \phi \, \mathrm{d}z &= \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi - f(z) \int_{\gamma_r} \frac{1}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \xi\end{aligned}$$

Aus den letzten drei Gleichungen folgt die Behauptung. □

Definition 6.3.2. *Die Reihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

heisst Laurent-Reihe um $a \in \mathbb{C}$. Dabei heisst

$$\sum_{-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n$$

Hauptteil und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Nebenteil. Die Laurent-Reihe heisst konvergent in z, falls ihr Haupt- und ihr Nebenteil konvergiert.

BEMERKUNG:

(1) Sei $\rho > 0$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ und $R > 0$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann konvergiert

$$\sum_{n=-\infty} a_n (z-a)^n$$

für alle $z \in K_{\frac{1}{\rho},R}(a)$ und divergiert falls $z \in B_{\frac{1}{\rho}}(a)$ oder $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_R(a)}$.

(2) Sei $K \subset K_{\frac{1}{\rho},R}(a)$ kompakt. Dann konvergiert $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ absolut auf K.

(3) Sei $a_{-1} = 0$.

$$\Rightarrow \quad F(z) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1}}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

ist Stammfunktion zu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Satz 6.3.3. *Konvergiert* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *in* $K_{r,R}(a)$ *gegen eine Funktion* f*, so gilt*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \mathrm{d}\xi \quad \forall\, \gamma_s(t) = a + s \cdot \mathrm{e}^{it},\ t \in [0, 2\pi]\,,\ s \in (r, R)$$

Bemerkung: Aus dem Satz folgt sofort die Eindeutigkeit der Laurentdarstellung.

Beweis. Es gilt

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^{k-n-1}$$

und nach der obigen Bemerkung besitzt die Funktion

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} - \frac{a_n}{z-a}$$

eine Stammfunktion. Also gilt

$$\int_{\gamma_s} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\, \mathrm{d}\xi = \int_{\gamma_s} \frac{a_n}{\xi - a}\, \mathrm{d}\xi = 2\pi i a_n.$$

□

Satz 6.3.4. *Jede in* $K_{r,R}(a)$ *holomorphe Funktion* f *besitzt genau eine Darstellung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Die a_n *sind wie im Satz 6.3.3 gegeben.*

Beweis. Seien $r < r' < R' < R$ und $z \in K_{r',R'}(a)$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, \mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, \mathrm{d}\xi$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - a}\frac{\xi - a}{(\xi - a) - (z - a)} \\
&= \frac{1}{\xi - a}\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} \\
&= \frac{1}{\xi - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - a}{\xi - a}\right)^n
\end{aligned}$$

für $|z - a| < R',\ |\xi - a| = R'$ und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi - z} &= -\frac{1}{z - a}\frac{z - a}{(z - a) - (\xi - a)} \\
&= -\frac{1}{z - a}\frac{1}{1 - \frac{\xi-a}{z-a}} \\
&= -\frac{1}{z - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi - a}{z - a}\right)^n
\end{aligned}$$

für $|z - a| > r,\ r = |\xi - a|$.
Damit ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R'}}\sum_{n=0}^{\infty} f(\xi)\frac{(z - a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r'}}\sum_{n=1}^{\infty} f(\xi)\frac{(\xi - a)^{n-1}}{(z - a)^n}\,\mathrm{d}\xi.$$

□

Beispiel: $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-1)} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$
In $B_1(0)$ gilt

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{z}{2}} + \frac{1}{1 - z} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.
\end{aligned}$$

In $K_{1,2}(0)$ gilt

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{z}{2}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.
\end{aligned}$$

In $\mathbb{C}\backslash\overline{B_2(0)}$ gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &\overset{\text{geom. Reihe}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{n-1}-1\right)z^{-n}. \end{aligned}$$

Definition 6.3.3. *Sei* $\Omega = \underbrace{K_{0,R}(z_0)}_{B_R(z_0)\backslash\{z_0\}}$ *und* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorph, dann nennen wir* z_0 *isolierte Singularität. Sei*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Man unterscheidet drei Fälle:

(1) f *hat in* z_0 *eine hebbare Singularität, wenn* $a_n = 0 \quad \forall\, n < 0$.

(2) f *hat in* z_0 *einen Pol der Ordnung* m*, falls* $a_{-m} \neq 0$ *und* $a_n = 0 \quad \forall\, n < -m$.

(3) f *hat in* z_0 *eine wesentliche Singularität, falls* $a_n \neq 0$ *für unendlich viele negative* n.

Beispiele:

(1) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z-i} = \dfrac{(z+i)(z-i)}{z-i} = z+i$ für $z \neq i \quad \Rightarrow \quad z_0 = i$ ist hebbar.

(2) $f(z) = (z-z_0)^{-m}$ hat einen Pol der Ordnung m in z_0.

(3) $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{-k}$ hat eine wesentliche Singularität in 0.

Satz 6.3.5. *Hat* f *bei* z_0 *einen Pol der Ordnung* $m > 0$*, so gilt*

$$|f(z)| \to \infty$$

für $z \to z_0$.

Beweis. Sei $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit $a_{-m} \neq 0$. Dann gilt

$$f(z) = (z-z_0)^{-m}\left(a_{-m} + \sum_{n=1-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^{m+n}\right)$$

und daher

$$|f(z)| \geq |z-z_0|^{-m} \underbrace{\left(|a_{-m}| - \sum_{n=1-m}^{\infty} |a_n|\, |z-z_0|^{m+n} \right)}_{\overset{z\to z_0}{\to}\ a_{-m}} \to \infty.$$

□

Satz 6.3.6. *Sei f holomorph bei z_0 und z_0 eine m-fache Nullstelle. Dann existiert ein $r > 0$ mit $f \neq 0$ auf $K_{0,r}(z_0)$ und $g = \frac{1}{f}$ ist holomorph auf $K_{0,r}(z_0)$ mit Pol der Ordnung m in z_0.*
Ebenso: Hat f einen Pol der Ordnung m in z_0, so hat $g = \frac{1}{f}$ eine m-fache Nullstelle in z_0.

Beweis. Wir beweisen nur die erste Aussage. Dazu sei

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} (z-z_0)^k \\ &=: (z-z_0)^m h(z), \end{aligned}$$

wobei $h(z)$ holomorph bei z_0 und $h(z_0) \neq 0$. Aus Stetigkeitsgründen existiert dann ein $r > 0$ mit $h(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in B_r(z_0)$ und damit ist $\frac{1}{h}$ holomorph in $B_r(z_0)$. Also folgt

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

mit $b_0 \neq 0$. Für $z \neq z_0$ gilt dann

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{f(z)} \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \\ &= \sum_{k=-m}^{\infty} b_{k+m} (z-z_0)^k, \end{aligned}$$

d.h. g hat eine Polstelle der Ordnung m in z_0. □

Satz 6.3.7 (Casorati-Weierstrass)**.** *Sei f holomorph auf $K_{0,r}(z_0)$.*

z_0 ist eine wesentliche Singularität von f

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, c \in \mathbb{C}: \ \exists \text{ Folge } z_n \to z_0 \text{ mit } f(z_n) \to c \text{ für } n \to \infty.$$

Beweis. **„⇐“** klar. Kann weder hebbar noch (nach SATZ 6.3.5) Polstelle sein!

„⇒“ Sei z_0 eine wesentliche Singularität.
Annahme: $\exists\, c \in \mathbb{C}$ so, dass wir keine Folge $z_n \to z_0$ finden können mit

$$f(z_n) \to c.$$

Dann existieren $r > 0,\ \varepsilon > 0: \ |f(z) - c| > \varepsilon \quad \forall\, z \in B_r(z_0)$.
Also ist die Funktion$g(z) = \dfrac{1}{f(z) - c}$ holomorph und beschränkt in $K_{0,r}(z_0)$.
Nach Satz 6.3.1 können wir g holomorph nach z_0 fortsetzen mit $|g(z_0)| \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$.
Somit ist z_0 eine hebbare Singularität von g und $f = \dfrac{1}{g} + c$ hat in z_0 entweder eine hebbare Singularität oder eine Polstelle (nach SATZ 6.3.6). Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

□

Korollar 6.3.1. *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ganz transzendent (d.h. $a_n \neq 0$ für unendlich viele n).*

$$\Rightarrow \quad \forall\, c \in \mathbb{C}\ \exists\, z_n \text{ mit } |z_n| \to \infty \text{ für } n \to \infty \text{ und } f(z_n) \to c \text{ für } n \to \infty.$$

Beweis. Die Funktion $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ hat eine wesentliche Singularität in 0 und aus Satz 6.3.7 folgt damit die Behauptung. □

Definition 6.3.4. *Sei $f : K_{0,r}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Die Zahl*

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} f(\xi) d\xi, \quad 0 < s < r,$$

heisst das Residuum von f in z_0. Wir definieren:

$$Res(f, z_0) := a_{-1}.$$

Satz 6.3.8. *Sei $f : K_{0,r}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 sein eine Polstelle m-ter Ordnung von f. Dann gilt:*

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} f(z)(z - z_0)^m \right).$$

Speziell haben wir für $m = 1$:

$$\mathit{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$$

Beweis. Übungsaufgabe! □

Beispiel: Die Funktion $f(z) = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ hat Singularitäten in $z_n = n\pi$. Da $\sin z$ in z_n einfache Nullstellen hat, sind diese Pole 1. Ordnung. Damit gilt zum Beispiel

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\cos z}{\sin z} z = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{\left(\frac{\sin z}{z}\right)} = 1.$$

Korollar 6.3.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $p, q : \Omega \to \mathbb{C}$ seien holomorph und $Z = \{\xi \in \Omega : q(\xi) = 0\}$. Definiere $f : \Omega \backslash Z \to \mathbb{C}$ durch*

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Sei $z_0 \in Z$ eine einfache Nullstelle von q mit $q'(z_0) \neq 0$. Dann gilt:

$$\mathit{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Beweis. Mit $q(z_0) = 0,\ q'(z_0) \neq 0$ gilt wegen Satz 6.3.8:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{\dfrac{q(z) - q(z_0)}{z - z_0}} \\
&= \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.
\end{aligned}$$

□

Satz 6.3.9 (Residuensatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. $f : \Omega \backslash \{z_j : j \in I\} \to \mathbb{C}$ holomorph, $\{z_j : j \in I\}$ habe keine Häufungspunkte in $\mathbb{C}$.*
Sei γ eine positiv orientierte Kurve, die in $\Omega \backslash \{z_j : j \in I\}$ geschlossen, ohne Selbstschnitte deren Inneres O in Ω enthalten ist. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{z_j \in O} \mathit{Res}(f, z_j)$$

Beweis. Es seien h_j die Hauptteile der Laurententwicklung von f in $z_j,\ j \in I$. Dann ist die Funktion

$$\tilde{f} = f - \sum_{z_j \in O} h_j$$

holomorph in O. Aus dem Cauchy'schen Integralsatz folgt dann

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{z_j \in O} \int_\gamma h_j\,\mathrm{d}z.$$

Sei $h_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_j)^{-k}$. Dann hat $h_j - a_{-1}(z-z_j)^{-1}$ eine Stammfunktion und damit haben wir

$$\int_\gamma h_j(z)\,\mathrm{d}z = a_{-1}\int_\gamma (z-z_j)^{-1}\,\mathrm{d}z = a_{-1}2\pi i = 2\pi i \mathrm{Res}(f, z_j).$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiele:

(1) Es gilt $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ für alle $a > 1$.
Dazu benutzen wir $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}\right)$ und $\gamma(\theta) := \mathrm{e}^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi$.
Dann gilt mit Hilfe des Residuensatz

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2a+2\cos\theta}\\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2a+\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}\\ &= \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{\mathrm{e}^{2i\theta}+2a\mathrm{e}^{i\theta}+1}\\ &= \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2az+1}\\ &= 2\pi \sum_{z_j \in B_1(0)} \mathrm{Res}(f, z_j),\end{aligned}$$

wobei $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2az+1}$ und die z_j sind die Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^2 + 2az + 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} z^2+2az+1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (z+a)^2 = a^2-1\\ &\Leftrightarrow \quad z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2-1}\end{aligned}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} z_1 &= -a + \sqrt{a^2-1} \in B_1(0) \\ z_2 &= -a - \sqrt{a^2-1} \notin B_1(0) \end{aligned}$$

und damit ist

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} = 2\pi \mathrm{Res}(f, z_1).$$

Weiterhin ist $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$, also hat f in z_1 einen Pol 1. Ordnung. Aus Satz 6.3.8 folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f, z_1) &= \lim_{z\to z_1} (z-z_1) f(z) \\ &= \lim_{z\to z_1} \frac{1}{z-z_2} \\ &= \frac{1}{z_1-z_2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir wie behauptet die Formel

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Dieses Prinzip lässt sich verallgemeinern:

Sei dazu R eine Funktion zweier komplexer Variablen. Unser Ziel ist die Berechnung von

$$I := \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, \mathrm{d}\theta$$

Setze $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$ und $\gamma(\theta) = \mathrm{e}^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Dann gilt mit Hilfe des Residuensatzes

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}, \frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}\right) \frac{\gamma'(\theta)}{\gamma(\theta}) \,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{i}\int_\gamma R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{\mathrm{d}z}{z} \\ &= 2\pi \sum_{z_j\in B_1(0)} \mathrm{Res}(f, z_j), \end{aligned}$$

wobei $f(z) = \dfrac{1}{z} R\left(\dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}, \dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)$ und z_j die Singularitäten von f sind. Damit folgt, dass R holomorph in einer Umgebung von $\overline{B_1(0)}$ mit Ausnahme von endlich viele singulären Punkten sein sollte.

(2) Damit wollen wir jetzt die Formel

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} = \sqrt{8}\pi$$

verifizieren. In diesem Fall ist

$$R(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{1}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$$

und damit haben wir

$$\begin{aligned} f(z) =& \frac{1}{z} R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right) \\ =& \frac{1}{z}\frac{16}{(z+\frac{1}{z})^4 + \left(z-\frac{1}{z}\right)^4} \\ =& \frac{16z^3}{(z^2+1)^4 + (z^2-1)^4} \\ =& \frac{8z^3}{z^8+6z^4+1}. \end{aligned}$$

Die Pole von f sind die vierten Wurzeln der Lösungen von

$$w^2 + 6w + 1 = 0.$$

Es folgt: $w_{1,2} = -3 \pm \sqrt{8}$. Weiter ist $|w_2| > 5$ und damit erfüllen alle z_j mit $z_j^4 = w_2$ die Abschätzung $|z_j| > 1$.
Ist $z^4 = \sqrt{8} - 3$, so gilt mit Korollar 6.3.2 und $p(z) = 8z^3$, $q(z) = z^8 + 6z^4 + 1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z) = \frac{p(z)}{q'(z)} &= \frac{8z^3}{8z^7 + 24z^3} \\ = \frac{1}{z^4+3} &= \frac{1}{\sqrt{8}}. \end{aligned}$$

Also gilt wie behauptet

$$I = 2\pi \sum_{z_j \in B_1(0)} \operatorname{Res}(f, z_j) = \frac{8\pi}{\sqrt{8}} = \sqrt{8}\pi.$$

Korollar 6.3.3. *Seien* $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *Polynome mit*

$$\deg(q) \geq \deg(p) + 2, \; q(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

und sei

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{Im(z)>0} Res(f,z)$$

Beweis. Sei die Kurve $\gamma_r = \gamma_{r,0} + \gamma_{r,1}$ definiert durch

$$\gamma_{r,0}:\ [-r,r] \to \mathbb{C},\ \gamma_{r,1}: [0,\pi] \to \mathbb{C}$$

und

$$\gamma_{r,0}(t) = t,\ \gamma_{r,1}(\theta) = r\mathrm{e}^{i\theta}.$$

Für r gross genug sind alle Nullstellen von q mit positivem Imaginärteil im Inneren $G_r := \{z \in \mathbb{C}:\ Im(z) > 0,\ |z| < r\}$ von γ_r. Also folgt aus dem Residuensatz

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{Im(z)>0} \mathrm{Res}(f,z) \quad &= \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \frac{p(r\mathrm{e}^{i\theta}) ir\mathrm{e}^{i\theta}}{q\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)}\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung folgt:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{p(r\mathrm{e}^{i\theta}) ir\mathrm{e}^{i\theta}}{q\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)} = 0 \quad \forall\, \theta \in [0,\pi]\,.$$

und damit ist

$$2\pi i \sum_{Im(z)>0} \mathrm{Res}(f,z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

BEISPIELE:

(1) Sei $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{i}{2}\dfrac{1}{z+i} - \dfrac{i}{2}\dfrac{1}{z-i}$. Die Funktion f hat also einfache Pole einfache Pole in $z_1 = i,\ z_2 = -i$ und es gilt

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = -\frac{i}{2}.$$

Aus Korollar 6.3.3. folgt damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\left(-\frac{i}{2}\right) = \pi.$$

(2) Sei

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+z+1)^2} = \frac{1}{(z-w)^2(z-\overline{w})^2},$$

wobei

$$w = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \overline{w} = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ein einfache Rechnung liefert

$$(z-w)^2(z-\overline{w})^2 = (z^2 - 2(w+\overline{w}) + |w|^2)^2 = (z^2+z+1)^2$$

und verifiziert somit die oben behauptete Zerlegung. Also hat f Pole 2. Ordnung in $z_1 = w$ und $z_2 = \overline{w}$. Aus Satz 6.3.8 folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_1) &= \lim_{z\to z_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big((z-w)^2 f(z)\Big) = \lim_{z\to z_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{(z-\overline{w})^2}\right)\\ &= \lim_{z\to z_1} \frac{-2}{(z-\overline{w})^3} = -\frac{2}{(\sqrt{3}i)^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}i}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Korollar 6.3.3 erhalten wir somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+x^1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

7 Fourier-Reihen und Fourier-Transformation

7.1 Fourier-Reihen

In diesem Abschnitt studieren wir periodische Funktionen mit Periode 2π, das heisst wir betrachten Funktionen $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.
Bemerkung: Hat die Funktion $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Periode $l > 0$, das heisst

$$g(x+l) = g(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

so hat die Funktion $f(x) = g\left(\frac{l}{2\pi}x\right)$ die Periode 2π, denn

$$f(x+2\pi) = g\left(\frac{l}{2\pi}(x+2\pi)\right) = g\left(\frac{l}{2\pi}x + l\right) = g\left(\frac{l}{2\pi}x\right) = f(x).$$

Definition 7.1.1. *Es sei $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und Riemann-integrierbar über $[0, 2\pi]$. Dann definieren wir:*

(1) Für $k \in \mathbb{Z}$ heisst

$$c_k := \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x$$

der k-te Fourier-Koeffizient von f.

(2) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx}$$

das n-te Fourier-Polynom von f.

(3) Die Reihe

$$Sf(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{ikx}$$

heisst Fourier-Reihe von f.

BEMERKUNG: Ist f reellwertig, so gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx} &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(c_{-k}\mathrm{e}^{ikx} + c_k \mathrm{e}^{ikx}\right) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[(c_k + c_{-k})\cos(kx) + i(c_k - c_{-k})\sin(kx)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k \cos(kx)\right],\end{aligned}$$

wobei $a_0 = c_0,\ b_0 = 0,\ a_k = (c_k + c_{-k}),\ b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad \forall\, k \geq 1.$

Als nächstes definieren wir für alle $n \in \mathbb{N}_0$ den Dirichlet-Kern $D_n :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikt}$$

Lemma 7.1.1. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$*

$$(S_n f)(x) = \int_0^{2\pi} D_n(x-y) f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Weiter haben wir die Darstellungsformel

$$D_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\pi \sin\frac{t}{2}}, & \text{für } t \notin 2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi k :\ k \in \mathbb{Z}\} \\ \dfrac{2n+1}{2\pi}, & \text{für } t \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

und es gilt

$$\int_0^{2\pi} D_n(t)\, \mathrm{d}t = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned}(S_nf)(x) &= \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\mathrm{e}^{-iky}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{ikx}\right)\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{ik(x-y)}\right)f(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{2\pi} D_n(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Für $t = 2\pi l$ mit $l \in \mathbb{Z}$ gilt

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\underbrace{\mathrm{e}^{2\pi ikl}}_{=1} = \frac{2n+1}{2\pi}.$$

Für $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ erhalten wir mittels der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{ikx} &= \mathrm{e}^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}\mathrm{e}^{ikx}\\ &= \mathrm{e}^{-inx}\frac{1-\mathrm{e}^{i(2n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{ix}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-i(n+\frac{1}{2})x}-\mathrm{e}^{i(n+\frac{1}{2})x}}{\mathrm{e}^{-i\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}}\\ &= \frac{\frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{i(n+\frac{1}{2})x}-\mathrm{e}^{-i(n+\frac{1}{2})x}\right)}{\frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-i\frac{x}{2}}\right)}\\ &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

Schliesslich erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\pi\sum_{k=-n}^{n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = 1,$$

denn

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases}2\pi, & \text{für } k=0\\ \left[\dfrac{1}{ik}\mathrm{e}^{ikt}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0, & \text{für } k\neq 0\end{cases}$$

□

Lemma 7.1.2. *Sei $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ beschränkt und Riemann-integrierbar. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t = 0$$

Beweis. (1) g ist Treppenfunktion.

Wir wählen eine Zerlegung $x_0 = -\pi < x_1 ... < x_k = \pi$, so dass für alle $1 \leq l \leq k$ gilt

$$g|_{(x_{l-1},x_l)} = c_l.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\sum_{l=1}^{k}\int_{x_{l-1}}^{x_l} c_l \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left|\sum_{l=1}^{k} c_l(\cos((n+\frac{1}{2})x_{l-1}) \right. \\ &\quad \left. - \cos((n+\frac{1}{2})x_l))\right| \\ &\leq \frac{2}{n+\frac{1}{2}}\sum_{l=1}^{k}|c_l| \\ &\to 0\end{aligned}$$

für $n \to \infty$.

(2) Allgemeiner Fall:
Sei $\varepsilon > 0$. Es existieren Treppenfunktionen e, f mit $e \leq g \leq f$ und

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f-e)(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Also haben wir

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi}(g(t)-f(t))\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Das zweite Integral konvergiert gegen 0 für $n \to \infty$ nach Schritt 1, und für das erste Integral gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(g(t)-f(t))\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi}|g(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-e(t))\,\mathrm{d}t \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit die Behauptung.

□

Satz 7.1.1. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Lipschitz-stetig und 2π-periodisch. Dann konvergiert $S_n f$ punktweise gegen f auf ganz $\mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$. Aus LEMMA 7.1.1 und mit Hilfe der Substitution $t = x - y$ folgt

$$\begin{aligned} f(x) - S_n f(x) &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} (f(x) - f(y))\, D_n(x-y)\, \mathrm{d}y \\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} \frac{(f(x) - f(y)) \sin\left((n+\frac{1}{2})(x-y)\right)}{2\pi \sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)}\, \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(f(x) - f(x-t)) \sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\pi \sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Nun definieren wir die Funktion

$$g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C},\ g(t) = \frac{(f(x) - f(x-t))\, \frac{1}{t}}{2\pi \frac{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}{t}}$$

Da f Lipschitz-stetig ist, ist g beschränkt und g ist stetig für $t \neq 0$. Also ist g auf $[-\pi, \pi]$ R-integrabel und mit Lemma 7.1.2 folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)\, \mathrm{d}t \to 0$$

für $n \to \infty$. □

BEMERKUNG: Die Bedingung, dass f Lipschitz-stetig ist, kann noch weiter abgeschwächt werden, aber f nur stetig ist noch nicht ausreichend.
BEISPIEL: Betrachte 2π-periodische „Zickzack-Funktion“ f mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x & \text{für } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Offenbar ist f Lipschitz-stetig. Es gilt für $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-ikx}\, \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} x\mathrm{e}^{-ikx}\, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x)\mathrm{e}^{-ikx}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi \mathrm{e}^{-ikx}}{-ik} - \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-ikx}}{-ik}\, \mathrm{d}x - \frac{\pi \mathrm{e}^{-ik\pi}}{-ik} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-ikx}}{-ik}\, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-ik\pi}}{-k^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{-k^2} - \frac{\mathrm{e}^{-ik\pi}}{-k^2} \\ &= 2\frac{(-1)^k - 1}{k^2} \end{aligned}$$

und $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi^2$. Damit sind die Fourier-Koeffizienten von f gegeben durch

$$c_0 = \frac{\pi}{2},\ c_k = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}.$$

Also haben wir

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad f(x) &= Sf(x) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \mathrm{e}^{ikx} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}, \\ k \text{ ungerade}}} \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{k^2} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}, \\ k \text{ ungerade}}} \frac{\cos(kx)}{k^2} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}
\end{aligned}$$

Speziell für $x = 0$ folgt aus $f(0) = 0$ die Formel

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}, \\ k \text{ ungerade}}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Weiter haben wir

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}, \\ k \text{ gerade}}} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}, \\ k \text{ ungerade}}} \frac{1}{k^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2k)^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

und damit

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Als nächstes definieren wir die Menge von Funktionen

$$R_{per} := \Big\{ f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}:\ f \text{ ist } 2\pi - \text{periodisch und } f\,|_{[0,2\pi]} \text{ ist R-integrabel} \Big\}.$$

Für $f \in \mathbb{R}_{per}$ setzen wir

$$||f|| := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left|\left| f\,|_{[0,2\pi]} \right|\right|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \ \mathrm{d}x}$$

R_{per} ist fast eine Norm, jedoch folgt aus $||f|| = 0$ nicht zwangsläufig $f = 0$.
Gilt $||f_n - f|| \to 0$ für $n \to \infty$, so sagen wir, f_n konvergiert gegen f im quadratischen

Mittel.
Weiter definieren wir ein Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x$$

Dies ist kein echtes Skalarprodukt, da es nur positiv semidefinit ist.
Der Fourier-Koeffizient c_k von f ist mit Hilfe dieser Definition

$$c_k = \langle f, \mathrm{e}^{ik\cdot} \rangle,$$

d.h. $c_k = \langle f, g \rangle$ mit $g(x) = e^{ikx}$.

Lemma 7.1.3. *Bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind die Funktionen $(\mathrm{e}^{ik\cdot})_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem, d.h. $\langle \mathrm{e}^{ik\cdot}, \mathrm{e}^{im\cdot} \rangle = \delta_{km}$.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{e}^{ik\cdot}, \mathrm{e}^{im\cdot} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{e}^{-im\cdot}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(k-m)x}\, \mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} \left[\dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\mathrm{e}^{i(k-m)x}}{i(k-m)} \right]_0^{2\pi} = 0, & \text{für } k \neq m \\ \dfrac{1}{2\pi} 2\pi = 1, & \text{für } k = m \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Als nächstes wollen wir zeigen, dass unter allen trigonometrischen Polynomen die Fourier-Polynome die best-approximierenden Polynome einer Funktion f sind.

Lemma 7.1.4. *Sei $f \in R_{per}$ und sei c_k der k-te Fourier-Koeffizient von f. Dann ist*

$$||f - S_n f||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

und

$$||f - S_n f|| < ||f - p||$$

für jedes trigonometrische Polynom $p \neq S_n f$ vom Grad $\leq n$.

Beweis. Sei $p(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} d_k \mathrm{e}^{ikx}$. Nach LEMMA 7.1.3 gilt:

$$\begin{aligned}
\langle f-p, f-p\rangle &= ||f||^2 - \langle \sum_{k=-n}^{n} d_k \mathrm{e}^{ik\cdot}, f\rangle - \langle f, \sum_{k=-n}^{n} d_k \mathrm{e}^{ik\cdot}\rangle \\
&\qquad + \langle \sum_{k=-n}^{n} d_k \mathrm{e}^{ik\cdot}, \sum_{k=-n}^{n} d_k \mathrm{e}^{ik\cdot}\rangle \\
&= ||f||^2 - \sum_{k=-n}^{n} \left(d_k \overline{c_k} + \overline{d_k} c_k\right) + \sum_{k=-n}^{n} \sum_{m=-n}^{n} d_k \overline{d_m} \langle \mathrm{e}^{ik\cdot}, \mathrm{e}^{im\cdot}\rangle \\
&= ||f||^2 - \sum_{k=-m}^{n} c_k \overline{c_k} + \sum_{k=-n}^{n} \left(c_k \overline{c_k} - d_k \overline{c_k} - c_k \overline{d_k} + d_k \overline{d_k}\right) \\
&= ||f||^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |c_k - d_k|^2 .
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist minimal, genau dann, wenn $d_k = c_k$ für $-n \leq k \leq n$ ist, was die zweite Behauptung zeigt. Die erste ergibt sich, indem man $d_k = c_k$ setzt. □

BEMERKUNG:

(1) Im Limes $n \to \infty$ ergibt sich die Besselsche Ungleichung $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq ||f||^2$

(2) Es gilt:

$$||S_n f||^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 .$$

Satz 7.1.2. *Sei $f \in R_{per}$ mit Fourier-Koeffizienten c_k, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$||f - S_n f|| \to 0$$

für $n \to \infty$. Weiter gilt

$$||f||^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 . \quad \textit{(Parsevalsche Gleichung)}$$

Lemma 7.1.5. *Ist f 2π-periodisch und stetig differenzierbar, so konvergiert Sf gleichmässig gegen f.*

Beweis. Die Fourier-Koeffizienten von f seien c_k und die Fourier-Koeffizienten von

f' seien d_k. Es gilt für $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ikx} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-ikx}}{-ik} f'(x) \, \mathrm{d}x = \frac{d_k}{ik}.$$

Weiter haben wir (da Sf punktweise gegen f konvergiert, siehe SATZ 7.1.1)

$$\begin{aligned}
||f - S_n f||_\infty &= \sup_{x \in [0,2\pi]} |Sf(x) - S_n f(x)| \\
&= \sup_{s \in [0,2\pi]} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{ikx} - \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx} \right| \\
&\leq \sup_{x \in [0,2\pi]} \sum_{|k| \geq n+1} \left| c_k \mathrm{e}^{ikx} \right| \\
&\leq \sum_{|k| \geq n+1} \left| \frac{d_k}{k} \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{|k| \geq n+1} \left(\frac{1}{k^2} + |d_k|^2 \right),
\end{aligned}$$

da

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(a-b)^2 \geq 0.$$

Die Reihen

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |d_k|^2$$

konvergieren absolut (Besselsche Ungleichung), also gilt

$$\lim_{n \to \infty} ||S_n f - f|| \to 0.$$

□

Lemma 7.1.6. *Ist $f \in R_{per}$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein stetig differenzierbares $f_\varepsilon \in R_{per}$ mit*

$$||f - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon.$$

Beweis. Schritt 1: f ist eine reellwertige Treppenfunktion.
Dann ist dies ein Approximationsargument.
Schritt 2: $f \in R_{per}$ und f reellwertig.
Es existieren Treppenfunktionen e, g mit

$$-||f||_\infty \leq e \leq f \leq g \leq ||f||_\infty$$

und

$$\int_0^{2\pi} (g-e) < \frac{\pi\varepsilon}{||f||_\infty}$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} ||f-e||^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)-e(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(x)-e(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\,||f||_\infty \,|g(x)-e(x)| \,\mathrm{d}x < \varepsilon. \end{aligned}$$

Zusammen mit Schritt 1 folgt die Behauptung.
<u>Schritt 3</u>: $f \in R_{per}$ komplexwertig
In diesem Fall zerlegen wir f in Real- bzw. Imaginärteil und wenden jeweils Schritt 2 an. □

Beweis. (von Satz 7.1.2)
Aus Lemma 7.1.4 folgt

$$||f - S_n f|| \to 0 \text{ für } n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad ||f||^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 .$$

Ist f stetig differenzierbar, so folgt aus Lemma 7.1.5

$$\begin{aligned} ||f - S_n f|| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_n f(x) - f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq ||S_n f - f||_\infty^2 \\ &\to 0 \end{aligned}$$

mit $n \to \infty$.

Für allgemeines $f \in R_{per}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig wähle ein f_ε wie in Lemma 7.1.6. Für ein beliebiges $g \in R_{per}$ folgt aus der Besselschen Ungleichung:

$$||S_n g|| \leq ||g|| .$$

Speziell für $g = f - f_\varepsilon$ mit $S_n g = S_n f - S_n f_\varepsilon$ gilt damit

$$\begin{aligned} ||f - S_n f|| &\leq ||f - f_\varepsilon|| + ||f_\varepsilon - S_n f_\varepsilon|| + ||S_n f_\varepsilon - S_n f|| \\ &\leq 2\,||f - f_\varepsilon|| + ||f_\varepsilon - S_n f_\varepsilon|| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

für n gross genug. □

Beispiel: Sei

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x, & \text{für } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Es gilt (siehe obiges Beispiel)

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \text{ ungerade}}} \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{k^2}.$$

Aus der Parsevalschen Identität folgt

$$||f||^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \text{ ungerade}}} \frac{1}{k^4},$$

wobei

$$\begin{aligned} ||f||^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} x^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} (2\pi - x)^2 \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$2 \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \text{ ungerade}}} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{48} \quad \Rightarrow \quad \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \text{ ungerade}}} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Also haben wir insgesamt

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^4} &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \text{ gerade}}} \frac{1}{k^4} + \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \text{ ungerade}}} \frac{1}{k^4} \\ &= \frac{1}{16} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^4} + \frac{\pi^4}{96}, \end{aligned}$$

also folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

7.2 Fourier-Transformation

Definition 7.2.1. *Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die für jedes $R > 0$ über $[-R, R]$ R-integrierbar ist. Wir nennen die Funktion f absolut integrierbar, falls:*

$$||f||_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x = \sup_{R>0} \int_{-R}^{R} |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$$

Bemerkung: Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar, so existiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \sup_{R>0} \int_{-R}^{R} f(x) \, \mathrm{d}x$$

und es gilt

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq ||f||_1 .$$

Die Menge der absolut integrierbaren Funktionen ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, und für $a \in \mathbb{C}$ sowie f, g absolut integrierbar gilt:

$$||af||_1 = |a| \, ||f||_1 \, , \; ||f + g||_1 \leq ||f||_1 + ||g||_1 \, .$$

Beispiele:

(1) Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ beschränkt, so ist f absolut integrierbar.

(2) Die durch $f(x) = (1 + |x|)^{-\alpha}$ definierte Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist absolut integrierbar für alle $\alpha > 1$, denn

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} (1 - x)^{-\alpha} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} (1 + x)^{-\alpha} \, \mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{1-\alpha} (1 - x)^{1-\alpha} \right]_{x=-\infty}^{x=0} + \left[\frac{1}{1-\alpha} (1 + x)^{1-\alpha} \right]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= \frac{2}{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

(3) Die durch $g(x) := \mathrm{e}^{-a|x|}$ definierte Funktion ist absolut integrierbar, falls $a > 0$ ist.

(4) Eine absolut integrierbare Funktion muss nicht beschränkt sein.

Sei dazu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{für } x \in \left[n, n + \frac{1}{n^2}\right] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

dann gilt

$$||f||_1 = n^{-\frac{3}{2}} \leq 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

aber indem wir n gross wählen, können wir f beliebig gross machen.

Lemma 7.2.1. *Seien $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ für jedes $R > 0$ über $[-R, R]$ integrierbar.*

(1) Gilt $|f|(x) \leq |g|(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ist g absolut integrierbar, so ist auch f absolut integrierbar.

(2) Ist f absolut integrierbar und g beschränkt, so ist fg absolut integrierbar und es gilt

$$||fg||_1 \leq ||f||_1 \, ||g||_\infty .$$

Definition 7.2.2. *Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar. Die Fouriertransformierte von f ist für $\xi \in \mathbb{R}$ durch*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x)\, \mathrm{d}x$$

definiert.

Bemerkung: Das Integral konvergiert absolut, da für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left|\mathrm{e}^{-i\xi x} f(x)\right| = |f(x)|$$

und f absolut integrierbar ist. Weiter ist

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x = ||f||_1$$

und damit gilt

$$||\mathcal{F}f||_\infty \leq ||f||_1 .$$

Beispiele:

(1) Sei $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C},\ f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}$ mit $a>0$. Wir haben

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ix\xi}\mathrm{e}^{-a|x|}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{ax-i\xi x}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax+i\xi x}\,dx\\
&= \left[\frac{\mathrm{e}^{ax-i\xi x}}{a-i\xi}\right]_{x=-\infty}^{x=0}-\left[\frac{\mathrm{e}^{-(ax+i\xi x)}}{a+i\xi}\right]_{x=0}^{x=\infty}\\
&= \frac{1}{a-i\xi}+\frac{1}{a+i\xi}\\
&= \frac{2a}{a^2+\xi^2}.
\end{aligned}$$

Die Funktion $\mathcal{F}f$ ist auch wieder absolut integrierbar.

(2) Sei $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definiert durch

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{für } x\in[-1,1]\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Es gilt für $\xi=0$:

$$\mathcal{F}f(0)=2$$

und für $\xi\neq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ix\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{\mathrm{e}^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{x=-1}^{x=1}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-i\xi}}{-i\xi}+\frac{\mathrm{e}^{i\xi}}{i\xi}\\
&= \frac{2}{\xi}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\xi}-\mathrm{e}^{-i\xi}}{2i}\right)\\
&= 2\frac{\sin\xi}{\xi}
\end{aligned}$$

Die Funktion $\mathcal{F}f$ ist stetig aber nicht mehr absolut integrierbar.

Lemma 7.2.2. *Sei $a>0$ und sei $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ für jedes $R>0$ auf $[-R,R]$ integrierbar. Ausserdem sei $x\mapsto\mathrm{e}^{a|x|}f(x)$ absolut integrierbar. Für $z\in\mathbb{C}$ mit $|Im(z)|<a$ gilt*

$$\left|\mathrm{e}^{ixz}\right|=\left|\mathrm{e}^{-ix(Re(z)+iIm(z))}\right|=\left|\mathrm{e}^{xIm(z)}\right|\le\mathrm{e}^{x|a|}\quad\forall\,x\in\mathbb{R}.$$

Also konvergiert das Integral

$$F(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ixz} f(x)\, \mathrm{d}x$$

absolut für $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|Im(z)| < a$. *Die Funktion*

$$F : \{z \in \mathbb{C} :\ |Im(z)| < a\} \to \mathbb{C},\ z \to F(z)$$

ist eine holomorphe Fortsetzung von $\mathcal{F}f$ *mit*

$$F'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{izx}(-ix) f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Beweis. Sei

$$H_a := \{z \in \mathbb{C} :\ |Im(z)| < a\}$$

und $z \in H_a$. Weiter sei

$$G(z) := -\int_{-\infty}^{\infty} ix\mathrm{e}^{-ixz} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Sei $h \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $|h| < (a - Im(z))/2 := \eta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - G(z) \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{i(z+h)z} - \mathrm{e}^{-ixz}}{h} + ix\mathrm{e}^{-ixz} \right) f(x)\, \mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-ihx} - 1}{ihx} + 1 \right) ix\mathrm{e}^{-ixz} f(x)\, \mathrm{d}x \right| \end{aligned}$$

Der Term in der Klammer ist betragsmässig kleiner als $|hx|\, \mathrm{e}^{|hx|}$. Also ist der Betrag des Integranden abgeschätzt durch

$$|h|\, x^2 f(x) \mathrm{e}^{(|Im(z)| + |h|)|x|} \le |h|\, x^2 \mathrm{e}^{(a-\eta)|x|}\, |f(x)| = hg(x)$$

und die Funktion g ist nach den Voraussetzungen absolut integrierbar. Also folgt

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - G(z) \right| \le |h| \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{(a-\eta)|x|}\, |f(x)|\ \mathrm{d}x \to 0$$

für $h \to 0$, und dies beweist die Behauptung. □

Satz 7.2.1. *Sei* $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *absolut integrierbar. Dann ist* $\mathcal{F}f$ *gleichmässig stetig. Ausserdem gilt:* $\mathcal{F}f(\xi) \to 0$ *mit* $|\xi| \to \infty$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert $\delta > 0$, so dass $\left|\mathrm{e}^{-ix} - 1\right| < \varepsilon$ für alle $|x| < \delta$.

Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ gilt dann

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}f(\xi+h) - \mathcal{F}f(\xi)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\mathrm{e}^{-i(\xi+h)t} - \mathrm{e}^{-i\xi t} \right) f(t) \right| \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathrm{e}^{-iht} - 1 \right| |f(t)| \, \mathrm{d}t \\
&\leq \varepsilon \int_{-\frac{\delta}{|h|}}^{\frac{\delta}{|h|}} |f(t)| \, \mathrm{d}t + 2 \int_{|t| > \frac{\delta}{|h|}} |f(t)| \, \mathrm{d}t \\
&\leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t + \underbrace{2 \int_{|t| > \frac{\delta}{|h|}} |f(t)| \, \mathrm{d}t}_{\to 0 \text{ für } |h| \to 0}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mathcal{F}f$ ist gleichmässig stetig.

Ist $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a,b] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$, so gilt für $\xi \neq 0$

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_a^b \mathrm{e}^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-ib\xi} - \mathrm{e}^{-ia\xi}}{i\xi} \to 0$$

mit $|\xi| \to \infty$. Damit gilt die Aussage auch für beliebige Treppenfunktionen. Jede absolut integrierbare Funktion kann durch Treppenfunktionen approximiert werden.

□

Lemma 7.2.3. *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar, so gilt:*

(1) Ist $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, so ist $\mathcal{F}\left[f(a\cdot)\right](\xi) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right)$

(2) Ist $b \in \mathbb{R}$, so ist $\mathcal{F}\left[f(\cdot - b)\right](\xi) = \mathrm{e}^{-ib\xi} \mathcal{F}f(\xi)$

(3) Ist $b \in \mathbb{R}$, so ist $\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{ib\cdot} f\right](\xi) = \mathcal{F}f(\xi - b)$

(4) Ist $x \mapsto xf(x)$ absolut integrierbar, so ist $\mathcal{F}f$ differenzierbar mit

$$(\mathcal{F}f)'(\xi) = \mathcal{F}\left[x \mapsto (-ix)f(x)\right](\xi)$$

(5) Ist $f \in PC^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und f' absolut integrierbar, so ist

$$\mathcal{F}\left[f'\right](\xi) = i\xi \mathcal{F}f(\xi)$$

Beweis. (1) Wir berechnen mit Hilfe der Substitution $y = ax$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f(a\cdot)\right](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-iy\frac{\xi}{a}} f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{|a|}\mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right).\end{aligned}$$

(2) Mit der Substitution $y = x - b$ folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f(\cdot - b)\right](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x-b)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-i\xi b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{e}^{-i\xi b}\mathcal{F}f(\xi)\end{aligned}$$

(3) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{ib\cdot} f\right](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi}\mathrm{e}^{ibx} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix(\xi-b)} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathcal{F}f(\xi - b)\end{aligned}$$

(4) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{iy}-1}{iy} - 1\right| < \varepsilon \quad \forall\ |y| < \delta.$$

Weiter existiert ein $M < \infty$, so dass

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{iy}-1}{iy} - 1\right| \leq M \quad \forall\ y \in \mathbb{R}.$$

Für $h \neq 0$ gilt dann

$$\begin{aligned}|\frac{\mathcal{F}f(\xi+h) - \mathcal{F}f(\xi)}{h} &+ \int_{-\infty}^{\infty} (ix)\mathrm{e}^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{d}x| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-ix(\xi+h)} - \mathrm{e}^{-ix\xi}}{h} + ix\mathrm{e}^{-ix\xi}\right) f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{e}^{-ixh}-1}{-ixh} - 1\right| |x|\,|f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \varepsilon\int_{-\frac{\delta}{|h|}}^{\frac{\delta}{|h|}} |x|\,|f(x)|\,\mathrm{d}x + \underbrace{M\int_{|x|\geq\frac{\delta}{|h|}} |x|\,|f(x)|\,\mathrm{d}x.}_{\to 0 \text{ mit } h\to 0}\end{aligned}$$

(5) Ist f' absolut integrierbar so existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{b\to\pm\infty} f(b)$, denn Mit

Hilfe des Hauptsatzes gilt

$$f(b) - f(0) = \int_0^b f'(t)\ \mathrm{d}t$$

und das Integral auf der rechten Seite konvergiert für $b \to \pm\infty$. Da f absolut integrierbar ist, folgt $\lim\limits_{b\to\pm\infty} f(b) = 0$. Für $a, b > 0$ folgt nun

$$\int_{-a}^{b} \mathrm{e}^{-i\xi x} f'(x)\ \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-i\xi x} f(x)\right]_{x=-a}^{x=b} + i\xi \int_{-a}^{b} \mathrm{e}^{-i\xi x} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Für $a, b \to \infty$ konvergiert der erste Term auf der rechten Seite gegen 0 und dies impliziert die Behauptung.

$\square$

Beispiel: Sei $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = -xf(x).$$

Indem wir die Fouriertransformation auf diese Gleichung anwenden, erhalten wir aus dem vorherigen Lemma

$$\begin{aligned} i\xi\mathcal{F}f(\xi) &= \mathcal{F}\left[f'\right](\xi) = \mathcal{F}\left[x \mapsto -xf(x)\right](\xi) \\ &= -i\left(\mathcal{F}f\right)'(\xi) \end{aligned}$$

also folgt

$$\left(\mathcal{F}f\right)'(\xi) = -\xi\mathcal{F}f(\xi).$$

Damit lösen f und $\mathcal{F}f$ dieselbe gewöhnliche Differentialgleichung. Also gilt

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\mathcal{F}f(0).$$

mit

$$\mathcal{F}f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\ \mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}.$$

Insgesamt folgt

$$\mathcal{F}f(\xi) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Lemma 7.2.4. *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar. Dann gilt:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\xi)g(\xi)\ \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)(\mathcal{F}f)(\eta)\ \mathrm{d}\eta$$

Beweis. Wir führen den Beweis nur für f, g mit $f(x) = g(x) = 0 \quad \forall\, x \notin [-a, a]$. Damit folgt aus dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} (\mathcal{F}f)(\xi) g(\xi)\, \mathrm{d}\xi &= \int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-i\xi\eta} f(\eta)\, \mathrm{d}\eta \right) g(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-i\xi\eta} g(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right) f(\eta)\, \mathrm{d}\eta \\
&= \int_{-a}^{a} (\mathcal{F}g)(\eta) f(\eta)\, \mathrm{d}\eta.
\end{aligned}$$

□

Satz 7.2.2 (Fourier-Inversionsformel)**.** *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *stetig, beschränkt, absolut integrierbar und* $\mathcal{F}f$ *sei auch absolut integrierbar. Dann gilt für alle* $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ix\xi} \mathcal{F}f(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Beweis. Zuerst bemerken wir das es ausreicht die Aussage für $x = 0$ zu zeigen. Denn für beliebige $b \in \mathbb{R}$ definieren wir dann die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(x) = f(x + b)$. Die Funktion g erfüllt dann auch alle Voraussetzungen des Satzes und wir haben $g(0) = f(b)$. Aus Lemma 7.2.3, 2., folgt weiter für alle $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}g(\xi) = \mathrm{e}^{ib\xi} \mathcal{F}f(\xi).$$

Zusammengefasst folgt

$$f(b) = g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}g(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ib\xi} \mathcal{F}f(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

also die Behauptung für alle $b \in \mathbb{R}$.

Setze jetzt $h(x) := \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ und $g(x) = h(ax)$ mit $a > 0$. Aus Lemma 7.2.3, Lemma 7.2.4 und der Substitution $x = ay$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\xi) h(a\xi)\, \mathrm{d}\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\mathcal{F}g)(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{a} (\mathcal{F}h) \left(\frac{x}{a} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(ay) (\mathcal{F}h)(y)\, \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

<u>Behauptung 1:</u> Für $a \to 0$ konvergiert die rechte Seite gegen

$$f(0)\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x = 2\pi f(0).$$

Denn: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon \quad \forall\, |x| < \delta.$$

Da f beschränkt ist, existiert weiter ein $M < \infty$ mit

$$|f(x) - f(0)| \leq M \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Damit gilt

$$|\int_{-\infty}^{\infty}(f(at) - f(0))(\mathcal{F}h)(t)\ \mathrm{d}t| \leq \varepsilon \int_{-\frac{\delta}{a}}^{\frac{\delta}{a}} |\mathcal{F}h)(t)|\, dt + M \int_{|t| \geq \frac{\delta}{a}} \mathcal{F}h)(t)\, dt$$

und wie in einigen vorherigen Argumenten konvergiert das zweite Integral für $a \to 0$ gegen Null.

<u>Behauptung 2:</u> Die linke Seite konvergiert für $a \to 0$ gegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\ \mathrm{d}\xi$$

Das Argument ist sehr ähnlich zum obigen Argument. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|h(x) - 1| \leq \varepsilon \quad \forall\ |x| < \delta$$

und es gilt

$$|h(x) - 1| \leq 2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Also haben wir

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{F}f)(\xi)h(a\xi)\ \mathrm{d}\xi - \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}f(\xi)\ \mathrm{d}\xi\right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}f(\xi))|\,|h(a\xi) - 1|\ \mathrm{d}\xi \\ &\leq \varepsilon \int_{-\frac{\delta}{a}}^{\frac{\delta}{a}} |\mathcal{F}f(\xi)|\ \mathrm{d}\xi + 2\int_{|\xi| \geq \frac{\delta}{a}} |\mathcal{F}f(\xi)|\ \mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

und das zweite Integral konvergiert für $a \to 0$ wieder gegen Null.

Insgesamt folgt daraus die Behauptung. □

Satz 7.2.3 (Plancherel)**.** *Ist $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar und gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\ \mathrm{d}t < \infty,$$

so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\xi)|^2\ \mathrm{d}\xi$$

Beweis. Wir führen den Beweis nur für den Fall, dass $\mathcal{F}f$ auch absolut integrierbar ist. Dann gilt nach LEMMA 7.2.4

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}f(\xi)} \, \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathcal{F}\{\overline{\mathcal{F}f}\}(\xi)$$

Es gilt

$$\overline{\mathcal{F}f(\eta)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\eta t}\overline{f}(t) \, \mathrm{d}t = \mathcal{F}\overline{f}(-\eta)$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\overline{\mathcal{F}f}\}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-it\xi}\mathcal{F}\overline{f}(-t) \, \mathrm{d}t \\
&\overset{t=-\eta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\eta t}\mathcal{F}\overline{f}(\eta) \, \mathrm{d}\eta \\
&= 2\pi\overline{f}(\xi) \\
\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

□

Definition 7.2.3. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die für jedes $R > 0$ über $[-R, R]$ integrierbar ist. Wir nennen f quadrat-integrierbar, falls*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \sup_{R>0} \int_{-R}^{R} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty.$$

In diesem Fall setzen wir

$$||f||_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

BEISPIELE:

(1) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und $\{x : f(x) \neq 0\}$ beschränkt, dann ist f quadrat-integrierbar.

(2) Die Funktion $f(x) = (1 + |x|)^{-\alpha}$ ist genau dann quadrat-integrierbar, wenn $\alpha > \dfrac{1}{2}$ ist. Es gibt also quadrat-integrierbare Funktionen, die nicht absolut integrierbar sind.

(3) Die durch $g(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$ definierte Funktion ist quadrat-integrierbar $\forall\ a \in \mathbb{C}$ mit $Re(a) > 0$.

BEMERKUNGEN:

(1) f, g seien quadrat-integrierbar. Dann ist fg absolut integrierbar mit

$$||fg||_1 \leq ||f||_2 \, ||g||_2$$

(2) Die Menge der quadrat-integrierbaren Funktionen ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und durch

$$\langle f, g \rangle := \int f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

ist ein „Skalarprodukt“ definiert.

(3) Es gilt:

$$||\alpha f||_2 = |\alpha| \, ||f||_2 \quad \forall \, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$||f+g||_2 \leq ||f||_2 + ||g||_2$$

(4) Wir können den Satz von Plancherel umformulieren zu

$$||\mathcal{F}f||_2 = \sqrt{2\pi} \, ||f||_2$$

(5) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ beschränkt und absolut integrierbar, dann ist f quadrat-integrierbar mit

$$||f||_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leq ||f||_\infty \, ||f||_1$$

Satz 7.2.4. *Sei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar, beschränkt und stetig differenzierbar. Ausserdem seien ψ' und $x \mapsto x\psi(x)$ absolut integrierbar und beschränkt. Dann gilt:*

$$||x\psi||_2 \, ||\xi \mathcal{F}\psi||_2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, ||\psi||_2^2$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
2Re\,\langle x\psi, \psi' \rangle &= \langle x\psi, \psi' \rangle + \langle \psi', x\psi \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x\psi(x)\overline{\psi'(x)} \, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x)\overline{x\psi(x)} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\psi(x)\overline{\psi'(x)} + \psi'(x)\overline{\psi(x)}\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(|\psi(x)|^2\right)' \, \mathrm{d}x \\
&= \left[x \, |\psi(x)|^2\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= - \, ||\psi||_2^2
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\frac{1}{2}\left|\left|\psi\right|\right|_2^2 = \left|Re\left\langle x\psi, \psi'\right\rangle\right| \leq \left|\left|x\psi\right|\right|_2 \left|\left|\psi'\right|\right|_2 .$$

Ausserdem ist

$$\left|\left|\psi'\right|\right|_2 = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left|\left|\mathcal{F}\{\psi'\}\right|\right|_2 = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left|\left|\xi\mathcal{F}\psi\right|\right|_2 ,$$

denn $\mathcal{F}\left\{f'\right\}(\xi) = i\xi\mathcal{F}f(\xi)$. Also folgt

$$\frac{1}{2}\left|\left|\psi\right|\right|_2^2 \leq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left|\left|x\psi\right|\right|_2 \left|\left|\xi\mathcal{F}\psi\right|\right|_2$$

oder

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left|\left|\psi\right|\right|_2^2 \leq \left|\left|x\psi\right|\right|_2 \left|\left|\xi\mathcal{F}\psi\right|\right|_2$$

□

Satz 7.2.5. *Seien $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar und g sei beschränkt. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist dann die Funktion $x \mapsto f(x)g(t-x)$ absolut integrierbar und die Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)\,\mathrm{d}x$ heisst Faltung von f und g.*
Notation: $h = f * g$.
Die Funktion $f * g$ ist stetig, beschränkt, absolut integrierbar und es gilt:

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi).$$

Zusatz: Ist $f(t) = g(t) = 0 \quad \forall\, t < 0$, so ist auch $(f * g)(t) = 0 \quad \forall\, t < 0$ und

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Mit der Substitution $y = t - x$ gilt:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(t-y)\,\mathrm{d}y$$

und damit erhalten wir mit Hilfe derselben Substitution

$$\begin{aligned} |h(t)| &\leq \left|\left|g\right|\right|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t-y)\right|\,\mathrm{d}y \\ &= \left|\left|g\right|\right|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|\,\mathrm{d}x = \left|\left|g\right|\right|_\infty \left|\left|f\right|\right|_1 . \end{aligned}$$

Also folgt

$$\left|\left|h\right|\right|_\infty \leq \left|\left|f\right|\right|_1 \left|\left|g\right|\right|_\infty .$$

Sei $\tau \in \mathbb{R}$. Es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
|h(t+\tau) - h(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left(f(t+\tau-y) - f(t-y) \right) \, \mathrm{d}y \right| \\
&\leq ||g||_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t+\tau-y) - f(t-y)| \, \mathrm{d}y \\
&= ||g||_{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau+x) - f(x)| \, \mathrm{d}x}_{\to 0 \text{ (ohne Beweis)}} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

für $\tau \to 0$.

Nun zeigen wir das h absolut integrierbar ist. Dies zeigen wir nur für f, g mit $f(x) = g(x) = 0 \quad \forall\, x \notin [-a, a]$. Dann gilt mit Hilfe des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, |g(t-x)| \, \mathrm{d}x \right) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t-x)| \, \mathrm{d}t \right)}_{\overset{s=t-x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)| \, \mathrm{d}s} \, \mathrm{d}x \\
&= ||g||_1 \, ||f||_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Zuletzt rechnen wir die behauptete Identität für die Fouriertransformation der Faltung von f und g nach. Dazu seinen die beiden Funktion wie oben. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} h(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) \, \mathrm{d}t \right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-it\xi} f(t) \mathrm{e}^{i\xi(x-t)} g(x-t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi} f(t) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi(x-t)} g(x-t) \, \mathrm{d}x \right)}_{= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi y} g(y) \, \mathrm{d}y = \mathcal{F}g(\xi)} \\
&= \mathcal{F}f(\xi) \cdot \mathcal{F}g(\xi).
\end{aligned}$$

□

Beispiele:

(1) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und absolut integrierbar und $q \in \mathbb{C}$. Gesucht ist eine

C^2-Funktion $u: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$-u'' + qu = f.$$

Wir wollen annehmen, dass u, u', u'' absolut integrierbar sind. Dann gilt:

$$\mathcal{F}\left\{-u'' + qu\right\}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)$$

und

$$\mathcal{F}\left\{-u'' + qu\right\}(\xi) = \xi^2 \mathcal{F}u(\xi) + q\mathcal{F}u(\xi),$$

denn $\mathcal{F}\left\{g'\right\}(\xi) = i\xi\mathcal{F}g(\xi)$. Zusammen folgt also

$$(\xi^2 + q)\hat{u}(\xi) = \hat{f},$$

also

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi^2 + q}.$$

Falls eine Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\hat{h}(\xi) = \dfrac{1}{\xi^2 + q}$ existiert, dann gilt

$$\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{h}(\xi)$$

und damit $\hat{u} = (\widehat{f * h})(\xi)$. Nach der Fourier-Inversionsformel folgt dann

$$u(x) = (f * h)(x).$$

Mit der Fourier-Inversionsformel gilt:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix\xi}}{\xi^2 + q} \, \mathrm{d}\xi$$

Sei $q \in \mathbb{R}, q > 0$. Nach einem früheren Beispiel gilt:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}\left\{x \mapsto \mathrm{e}^{-a|x|}\right\}(\xi) &&= \frac{2a}{a^2 + \xi^2} \\
\Rightarrow \quad & \mathcal{F}\left\{x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{q}}\mathrm{e}^{-\sqrt{q}|x|}\right\}(\xi) &&= \frac{1}{\xi^2 + q} \\
\Rightarrow \quad & h(x) &&= \frac{1}{2\sqrt{q}}\mathrm{e}^{-\sqrt{q}|x|}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$u(x) = (h * f)(x) = \frac{1}{2\sqrt{q}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{q}|x-t|} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

(2) Wärmeleitungsgleichung

Gesucht ist $u : \; [0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u & \text{für } t>0, x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) & \text{für } x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Vorausgesetzt sei, dass f absolut integrierbar ist. Ausserdem sei u für alle $t>0$ absolut integrierbar. Wir setzen

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \hat{u}(t,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} u(t,x)\,\mathrm{d}x$$

Dann gilt:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(t,\xi) & = -\xi^2 \hat{u}(t,\xi) \\ \hat{u}(0,\xi) & = \hat{f}(\xi) \end{cases}$$

Für festes $\xi\in\mathbb{R}$ hat dieses System die eindeutige Lösung

$$\hat{u}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-t\xi^2}\hat{f}(\xi).$$

<u>Behauptung</u>: Für $h(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}$ gilt:

$$\hat{h}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-t\xi^2}.$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-ix\xi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}\,\mathrm{d}x &\overset{\substack{\frac{x}{\sqrt{2t}}=y \\ \mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4t}}}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{e}^{-iy\sqrt{2t}\xi}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\left\{y\mapsto \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\right\}(\sqrt{2t}\xi) \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{2t}\xi)^2}{2}} = \mathrm{e}^{-t\xi^2}. \end{aligned}$$

Somit ist $u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\,\mathrm{d}y$

Im Folgenden machen wir uns darüber Gedanken ob die obigen beiden Beispiele wirklich durch die angegebenen Funktionen u gelöst werden.

Zu Beispiel:

(1) Für $q\in\mathbb{R},\ q>0$ haben wir

$$u(x) := \frac{1}{2\sqrt{q}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{q}|x-y|} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Frage: Löst u die Gleichung?
Wir können u zweimal differenzieren und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
u(x) =& \frac{1}{2\sqrt{q}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\sqrt{q}(x-y)} f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2\sqrt{q}} \int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{q}(x-y)} f(y)\,\mathrm{d}y, \\
u'(x) =& \frac{1}{2\sqrt{q}} f(x) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(x-y)} f(y)\,\mathrm{d}y \\
& - \frac{1}{2\sqrt{q}} f(x) + \frac{1}{2} \int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{q}(y-x)} f(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{und} \\
u''(x) =& -\frac{1}{2} f(x) + \frac{\sqrt{q}}{2} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\sqrt{q}(x-y)} f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2} f(x) \\
& + \frac{\sqrt{q}}{2} \int_{x}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{q}(y-x)} \\
=& - f(x) + \frac{\sqrt{q}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{q}|x-y|} = -f(x) + qu(x),
\end{aligned}$$

also

$$-u'' + qu = f.$$

(2) In diesem Fall hatten wir die Lösung

$$u(t,x) = g_t * f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\dfrac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,\mathrm{d}y$$

gefunden, wobei

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-t\xi^2}\right)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ix\xi} \mathrm{e}^{-t\xi^2} \mathrm{d}\xi$$

Behauptung 1: Für alle Werte $t > 0$ ist $u(t,x)$ beliebig oft nach x differenzierbar.
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $t > 0$ ist $\xi \mapsto \xi^k \mathrm{e}^{-t\xi^2}$ absolut integrierbar. Damit ist die Funktion

$$x \mapsto \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-t\xi^2}\right)(x)$$

beliebig oft nach x differenzierbar (Lemma 7.2.3,4). Da die Funktion $\xi \mapsto \mathcal{F}f(\xi)$ beschränkt ist, geben dieselben Argumente, dass

$$x \mapsto u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-t\xi^2} \mathcal{F}f(\xi)\right)(x)$$

auch beliebig oft nach x differenzierbar ist. Wir erhalten sogar

$$\partial_x^k u(t,x) = \left(\partial_x^k g_t\right) * f(x)$$

Behauptung 2: $u(t,x)$ ist beliebig oft nach t differenzierbar ($t > 0$) und es gilt:

$$\partial_t^k u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_t^k g_t\right)(x-y) f(y)\, \mathrm{d}y$$

Sei $k = 1$, t und x fest. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{u(t+h,x) - u(t,x)}{h} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_t g_t\right)(y) f(x-y)\, \mathrm{d}y \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{g_{t+h}(y) - g_t(y)}{h} - \partial_t g_t(y) \right) f(x-y)\, \mathrm{d}y \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left| \frac{g_{t+h}(y) - g_t(y)}{h} - \partial_t g_t(y) \right|}_{:= r_{t,h}(y)} |f(x-y)|\, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Sei $\phi(t,y) = \partial_t g_t(y)$, dann ist

$$\begin{aligned}
r_{t,h}(y) &= \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left(\phi(\tau,y) - \phi(t,y)\right)\, \mathrm{d}\tau \right| \\
&\leq \sup_{|t-\tau|<|h|} |\phi(\tau,y) - \phi(t,y)| \\
&\leq |h| \sup_{\xi\in[\tau,t]} |\partial_t \phi(\xi,y)| \to 0
\end{aligned}$$

für $h \to 0$. Insgesamt folgt mit Hilfe von Übungsblatt 1:

$$(\partial_t - \Delta) u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\partial_t - \Delta\right) g_t(y)\right) f(x-y)\, \mathrm{d}y = 0.$$

Behauptung 3: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{t\searrow 0} u(t,x) = f(x)$, wenn f in x stetig ist.

Wir haben:

$$u(t,x) = (g_t * f)(x) \quad \text{und} \quad g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} g_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \qquad \forall\, t > 0$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Folgenden

Satz 7.2.6. *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und für jedes $R > 0$ über $[-R,R]$ integrierbar und ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar mit $\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, \mathrm{d}y = 1$, sowie*

$$u(t,x) = \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)\, \mathrm{d}y,\ t > 0, x \in \mathbb{R},$$

so gilt

$$\lim_{t\searrow 0} u(t,x) = f(x),$$

wenn f in x stetig ist.

BEMERKUNG: Mit t ersetzt durch $\sqrt{t}$ und h ersetzt durch g_1 sind wir genau in der Situation von Beispiel 2.
Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4^2}} \, \mathrm{d}y \overset{x=\frac{y}{2} \rightsquigarrow \mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = 1.$$

Behauptung 3 folgt also aus dem SATZ 7.2.6.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $M < \infty, \delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq M \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

und

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\ |x - y| < \delta.$$

Wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{x-y}{t}\right) \, \mathrm{d}y = t \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \, \mathrm{d}z = t \quad \forall\, t > 0,$$

gilt

$$\begin{aligned}
|u(t,x) - f(x)| \quad & \leq \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \left| h\left(\frac{x-y}{t}\right) \right| |f(y) - f(x)| \, \mathrm{d}y \\
& = \frac{1}{t} \int_{|x-y|<\delta} \left| h\left(\frac{x-y}{t}\right) \right| |f(y) - f(x)| \, \mathrm{d}y \\
& \quad + \frac{1}{t} \int_{|x-y|\geq\delta} \left| h\left(\frac{x-y}{t}\right) \right| |f(x) - f(y)| \, \mathrm{d}y \\
& \leq \frac{\varepsilon}{t} \int_{|x-y|<\delta} \left| h\left(\frac{x-y}{t}\right) \right| \, \mathrm{d}y + \frac{M}{t} \int_{|x-y|\geq\delta} \left| h\left(\frac{x-y}{t}\right) \right| \, \mathrm{d}y \\
& = \varepsilon \int_{|z|<\frac{\delta}{t}} |h(z)| \, \mathrm{d}z + \underbrace{M \int_{|z|\geq\frac{\delta}{t}} |h(z)| \, \mathrm{d}z}_{\to 0 \text{ für } t \to 0}.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\lim_{t \searrow 0} |u(t,x) - f(x)| = 0.$$

$\square$