Institut für Analysis

JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Klausur Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Sommersemester 2015 - 19.08.2015

Name:

Matrikelnummer:

Punkte:

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	$\sum$

Zu jedem Schritt gehört mindestens eine kurze Begründung (falls nicht anders angegeben) sowie beim Verwenden von Theoremen müssen die Voraussetzungen angegeben und geprüft werden. Geben Sie besser einen Zwischenschritt zu viel als zu wenig an.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen!

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe. Sie dürfen direkt unter die Aufgaben Ihre Lösungen schreiben sowie die Rückseiten verwenden. Falls Sie weiteres Papier benötigen, melden Sie sich.

Die Klausureinsicht findet am 24.08.15 von 14:00h-15:00h im Raum 3.065 im Kollegiengebäude Mathematik (20.30) statt.

Aufgabe 0 (1 Punkt)

Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer, auch auf dieses Blatt.

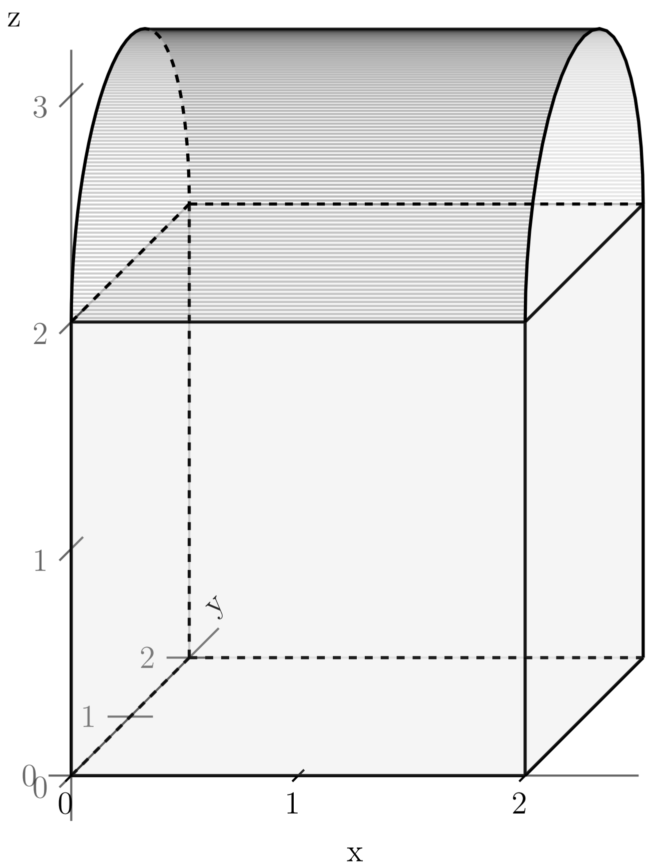

Abbildung 1: Skizze der Menge G aus Aufgabe 4.

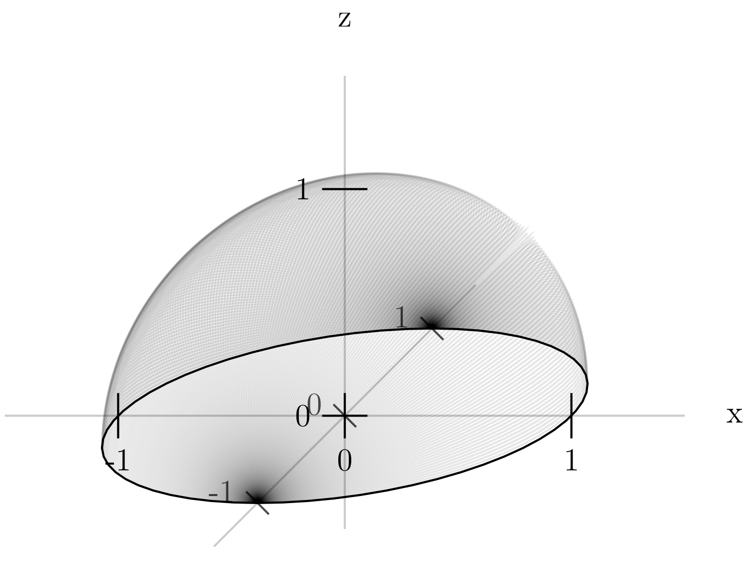

Abbildung 2: Skizze der Menge S^2_+ aus Aufgabe 7.

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 1 (6+6 Punkte)

a) Geben Sie die Definition einer unberandeten k-dimensionalen $\mathcal{C}^\alpha$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ an. Was ändert sich beim Übergang zu einer berandeten Untermannigfaltigkeit?

b) Korrigieren Sie die Fehler in den folgenden alternativen Darstellungen einer k-dimensionalen $\mathcal{C}^\alpha$-Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^m$, indem Sie die fehlerhaften Stellen streichen und direkt darunter in den freien Zeilen korrigieren.

1. Für ein $x_0 \in M$ existiert $\Omega \underset{\text{off}}{\subset} \mathbb{R}^m$ Umgebung von x_0 und ein $\Psi \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit

$$\Psi(\Omega \cap M) = \big(\mathbb{R}^k \times \{0\}\big) \cap \Psi(\Omega).$$

2. Für ein $x_0 \in M$ existiert eine Umgebung $\Omega \underset{\text{off}}{\subset} \mathbb{R}^m$ von x_0 und ein $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^k)$, so

   dass $\Omega \cap M = f^{-1}(0)$ und $\operatorname{Rang} Df(x) = k$ für alle $x \in \Omega$ gilt.

3. Für ein $x_0 \in M$ existiert $U \underset{\text{off}}{\subset} \mathbb{R}^k$ und $h \in \mathcal{C}^\alpha(U, \mathbb{R}^{m-k})$, so dass

$$x_0 \in W = \{(y, h(y)) : y \in U\} \underset{\text{off}}{\subset} M.$$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 2

(4+3+3 Punkte)

Sei die 2-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$-Untermannigfaltigkeit $M = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ des $\mathbb{R}^2$ gegeben.

a) Geben Sie einen Atlas für die 1-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$-Untermannigfaltigkeit ∂M an (ohne Begründung).

b) Geben Sie die Anzahl der Orientierungen für M sowie für ∂M mit kurzer Begründung an.

c) Zeigen Sie, dass M mindestens zwei verschiedene Orientierungen besitzt, indem Sie zwei Atlanten aus verschiedenen Äquivalenzklassen angeben.

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)

Sei die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 1\}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Geben Sie den $\mathcal{C}^\infty$-Rand ∂M der Untermannigfaltigkeit M (ohne Begründung) an.

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 4

(3+6+12+(4 Bonus) Punkte)

Gegeben sei die Funktion $h \in \mathcal{C}^\infty((0,2)^2, \mathbb{R})$ mit $h(x,y) = \sqrt{1-(y-1)^2} + 2$ und die Menge G sei beschrieben durch (siehe Abbildung 1)

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 2, 0 < y < 2, 0 < z < h(x,y)\}.$$

Außerdem sei die Funktion $F : G \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x(x-2)y(y-2) \\ x(2-x)y(y-2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der $\mathcal{C}^1$-Rand ∂G von G lässt sich bis auf eine 2-dimensionale Hausdorff-Nullmenge beschreiben durch

$$R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \cup R_5 \cup R_6,$$

wobei

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(x,y,0) : 0 < x, y < 2\}, \\
R_2 &= \{(x,0,z) : 0 < x, z < 2\}, \\
R_3 &= \{(x,2,z) : 0 < x, z < 2\}, \\
R_4 &= \{(0,y,z) : 0 < y < 2, 0 < z < h(0,y)\}, \\
R_5 &= \{(2,y,z) : 0 < y < 2, 0 < z < h(2,y)\}, \\
R_6 &= \{(x,y,h(x,y)) : 0 < x, y < 2\}.
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie $\mathrm{vol}_2(R_6)$ mit Hilfe der Definition des Integrals über Untermannigfaltigkeiten. **Hinweis:** Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\Psi : (0,2) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\Psi(s,t) = \begin{pmatrix} s \\ \cos(t) + 1 \\ \sin(t) + 2 \end{pmatrix},$$

eine Karte von R_6 ist.

b) Rechnen Sie nach, dass der äußere Normalenvektor an G in $(x,y,h(x,y)) \in R_6$ gegeben ist durch

$$\nu(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y-1 \\ \sqrt{1-(y-1)^2} \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie

$$\int_G \operatorname{div} F(x,y,z) d(x,y,z)$$

mit Hilfe des Satzes von Gauß. Sie dürfen weiterhin die Karte aus Teil a) ohne Beweis verwenden. **Hinweis:** Die Ableitung von $g : t \mapsto -\frac{1}{3}\sin^3(t)$ ist

$$g'(t) = \big(\cos^2(t) - 1\big)\cos(t) = \big(\cos(t)+1\big)\big(\cos(t)-1\big)\cos(t).$$

d) Verifizieren Sie die Voraussetzungen des Satzes von Gauß (4 Bonuspunkte).

Name: **Matrikelnummer:**

Name: **Matrikelnummer:**

Name: **Matrikelnummer:**

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 5

(5 Punkte)

Bestimmen Sie folgende Dach-Produkte im Grundraum $\mathbb{R}^3$:

(i) $(zdx \wedge dy + xydy \wedge dz) \;\wedge\; (x^2y^2z^2dx \wedge dx + yxdz \wedge dx + x^2dz \wedge dy)$

(ii) $(e^x dy + 2dz) \;\wedge\; (2e^{-x}dz \wedge dx - \frac{1}{2}dx \wedge dy)$

(iii) $(x^2dy + 8dx \wedge dy) \;\wedge\; (e^{-y}dx \wedge dx + z^2dz \wedge dz)$

Vereinfachen Sie jedes Ergebnis so weit wie möglich.

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 6

(8 Punkte)

Gegeben sei die 1-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$-Untermannigfaltigkeit $M = \big(\{0\} \times (0,1)\big) \cup \big((0,1) \times \{0\}\big)$ von $\mathbb{R}^2$ und die Differentialform $\omega = dx + dy$. Welche der folgenden Aussagen ist möglich?

$$(i) \int_M \omega = 2, \qquad (ii) \int_M \omega = 0, \qquad (iii) \int_M \omega = -2.$$

Geben Sie eine Begründung an.

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 7

(3+4+3 Punkte)

Gegeben sei das Integral

$$\left| \int_{\partial S^2_+} \omega \right|$$

mit der Differentialform $\omega = 2xzdx + y^2dy + x^2dz$ und der oberen Kuppel des Einheitsballs im $\mathbb{R}^3$

$$S^2_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\},$$

siehe Abbildung 2.

a) Geben Sie ohne Begründung den Rand ∂S^2_+ von S^2_+ an sowie eine Karte, welche den Rand ∂S^2_+ mit Ausnahme einer 1-dimensionalen Hausdorff-Nullmenge überdeckt.

b) Berechnen Sie das angegebene Integral direkt mit Hilfe der Karte aus Teil a).

c) Berechnen Sie das gegebene Integral unter Verwendung des Satzes von Stokes.