1. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 1: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Geben Sie Beispiele für Differentialgleichungen für Funktionen $y = y(x)$ in $x \in I$ mit den folgenden Eigenschaften an:

	Beispiel
separabel, nicht linear	
nicht separabel, nicht linear	
linear und homogen	

Lösung 1: Beispiele für mögliche Lösungen:

	Beispiel
separabel, nicht linear	$y'(x) = xy^2(x)$
nicht separabel, nicht linear	$y'(x) = \sin(x^2y^2(x))$
linear und homogen	$y'(x) = x^3y(x)$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben:
(a) $y'(x) = \dfrac{1}{1-x}y(x) + x - 1, \quad x > 1, \quad y(2) = 0,$
(b) $y'(x) = \sqrt{1 - y^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}.$
Lösung 2:

(a) Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'(x) = \frac{1}{x-1}y(x)$ bestimmen wir mit dem Separationsansatz:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x-1} \Longrightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int \frac{1}{x-1} = -\ln(x-1) + K,\ K \in \mathbb{R}.$$

Mit $y'(x)dx = dy(x)$ erhalten wir für die linke Seite dann

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int \frac{1}{y(x)}dy(x) = \ln|y(x)|.$$

Wir wenden auf beiden Seiten die Exponentialfunktion an, und sehen

$$|y(x)| = e^{-\ln(x-1)} \cdot e^K = \frac{1}{x-1}e^K \Longrightarrow y(x) = \frac{1}{x-1}C$$

mit einer beliebigen Konstanten $C(= \pm e^K) \in \mathbb{R}$. Beachte, dass $\frac{1}{x-1}C$ wohldefiniert ist, da $x > 1$ vorausgesetzt ist. Also ist $y_h(x) = C\frac{1}{x-1}$ für jedes $C \in \mathbb{R}$ Lösung der homogenen Gleichung.

Zur Bestimmung der Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $y'(x) = \frac{1}{x-1}y(x) + x - 1$ $(*)$ verwenden wir Variation der Konstanten. Wir machen den Ansatz $y(x) = C(x)\frac{1}{1-x}$, dann ist

$$y'(x) = C'(x)\frac{1}{x-1} - C(x)\frac{1}{(x-1)^2},$$

und wir setzen dies in unsere DGL $(*)$ ein:

$$C'(x)\frac{1}{x-1} - C(x)\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}C(x)\frac{1}{x-1} + x - 1 \Longleftrightarrow C'(x) = (x-1)^2$$
$$\Longrightarrow C(x) = \int C'(x)dx = \int (x-1)^2dx = \frac{(x-1)^3}{3} + D,\ D \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung der DGL $(*)$ ist also gegeben durch

$$y(x) = C(x)\frac{1}{x-1} = (\frac{(x-1)^3}{3} + D)\cdot\frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{3} + D\frac{1}{x-1},\ D\in\mathbb{R}.$$

Bemerkung: Für jede fest gewählte Konstante $D_0 \in \mathbb{R}$ heißt die Lösung $y(x) = \frac{(x-1)^2}{3} + D_0\frac{1}{x-1}$ partikuläre Lösung der DGL. Die Lösungsmenge der DGL ergiebt sich dann gerade durch Addition der homogenen Lösungen zu einer gewählten partikulären Lösung.

Die Anfangsbedingung $y(2) = 0$ impliziert

$$0 = \frac{(2-1)^2}{3} + D\frac{1}{2-1} = \frac{1}{3} + D \Longleftrightarrow D = -\frac{1}{3}.$$

Somit ist $y(x) = \frac{1}{3}((x-1)^2 - \frac{1}{x-1})$ die Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Das ist eine autonome Differentialgleichung, und der Separationsansatz liefert hier wieder mit $y'(x)dx = dy(x)$:

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1-y(x)^2}} = 1 \Longrightarrow \int\frac{dy(x)}{\sqrt{1-y(x)^2}} = \int dx = x + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Es ist $\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y,\ y\in(-1,1)$, und durch Anwenden der Sinusfunktion erhalten wir

$$\arcsin y(x) = x + C \Longleftrightarrow y(x) = \sin(x+C) \quad \text{mit} -\frac{\pi}{2} - C \le x \le \frac{\pi}{2} - C,$$

da $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ der Wertebereich des Arcussinus ist.

Die Anfangsbedingung $\frac{1}{2} = y(0) = \sin(0+C)$ liefert $C = \frac{\pi}{6}$.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) = (y(x))^2 - (2x+1)y(x) + 1 + x + x^2, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Hinweis: Ansatz $y(x) = x + (u(x))^{-1}$.

Lösung 3: Wie angegeben suchen wir eine Lösung der Form $y(x) = x + (u(x))^{-1}$. Dann ist

$$y'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{(u(x))^2},$$

und wir setzen die Terme für y' und y in die Differentialgleichung ein, um eine Differentialgleichung in u zu bekommen:

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{u'(x)}{(u(x))^2} = \left(x + \frac{1}{u(x)}\right)^2 - (2x+1)\left(x + \frac{1}{u(x)}\right) + 1 + x + x^2 \Longleftrightarrow \\
&1 - \frac{u'(x)}{(u(x))^2} = x^2 + \frac{2x}{u(x)} + \frac{1}{(u(x))^2} - 2x^2 - \frac{2x}{u(x)} - x - \frac{1}{u(x)} + 1 + x + x^2 \Longleftrightarrow \\
&u'(x) = u(x) - 1\ (*),
\end{aligned}$$

Wir bestimmen nun eine Lösung der homogenen DGL $u'(x) = u(x)$. Nach dem Separationsansatz ist $\frac{u'(x)}{u(x)} = -1$, und es folgt

$$\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx = -1dx = -x + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Mit $u'(x)dx = du(x)$ ist dann $\ln|u(x)| = -x + C$, und Anwenden der Exponentialfunktion liefert

$$\ln|u(x)| = -x + C \Longrightarrow u(x) = \pm\exp(C)\exp(x) = K\exp(x),\ K(=\pm e^C)\in\mathbb{R}.$$

Also ist unser Ansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $(*)$ durch $u(x) = K(x)\exp(x)$ gegeben. Wir setzen die Ausdrücke für $u(x)$ und $u'(x)$ in die inhomogene DGL $(*)$ ein, und erhalten

$$K'(x)\exp(x) + K(x)\exp(x) = K(x)\exp(x) - 1 \Longleftrightarrow K'(x) = -\exp(-x).$$

Integration liefert

$$K(x) = \int K'(x)dx = -\int\exp(-x)dx = \exp(-x) + D,\ D\in\mathbb{R}.$$

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung für die DGL $(*)$:

$$u(x) = K(x)\exp(x) = (\exp(-x) + D)\exp(x) = 1 + D\exp(x),\ D\in\mathbb{R}.$$

Durch Rücksubstitution $y(x) = x + (u(x))^{-1}$ finden wir für die ursprüngliche Differentialgleichung die allgemeine Lösung

$$y(x) = x + \frac{1}{1 + D\exp(x)}, \qquad D \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Das sind nicht alle Lösungen, es fehlt noch die Lösung $y(x) = x$ (setze $D =$ "∞"). Die muss man aber nicht sehen, um volle Punkte zu bekommen.
Bemerkung: Wir können die DGL $u'(x) = u(x) - 1$ auch direkt mit dem Separationsansatz lösen, da $u(x) - 1 = h(u(x)$ mit der Funktion $h(z) = z - 1$ eine autonome DGL darstellt:

$$\frac{u'(x)}{u(x)-1} = 1 \Longrightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)-1}dx = \int 1dx = x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Weiter ist $\int \frac{1}{u-1}du = \ln|u-1|$, was uns zu der Gleichung $|u(x) - 1| = e^x e^C$ führt. Mit $K = \pm e^C \in \mathbb{R}$ ist dann $u(x) = Ke^x - 1$. Wir kommen hier also auch schneller ans Ziel und brauchen Variation der Konstanten nicht unbedingt.

Aufgabe 4: Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme (Hinweis: Bernoulli):
(a) $y'(x) + y(x) - y^3(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = \frac{1}{2}$,
(b) $(y(x))^3 - x^2 + x(y(x))^2y'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad y(1) = 1$.
Lösung 4:

(a) Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)y(x)^\alpha$ mit $\alpha = 3$, $p(x) = 1$, $q(x) = -1$. Laut Skript ist $\lambda = \frac{1}{1-\alpha} = -\frac{1}{2}$ zu wählen. Wir setzen $y(x) = (v(x))^{-1/2}$, dann ist

$$y'(x) = (v(x)^{-1/2})' = -\frac{1}{2}v(x)^{-3/2}v'(x).$$

Wir setzen diese Ausdrücke für $y(x)$ und $y'(x)$ in die DGL ein:

$$0 = y'(x) + y(x) - y^3(x) = -\frac{1}{2}v(x)^{-3/2}v'(x) + v(x)^{-1/2} - v(x)^{-3/2} \Longleftrightarrow$$
$$-v(x)^{-3/2}(\frac{1}{2}v'(x) + 1) = -v(x)^{-1/2} \Longleftrightarrow v'(x) = 2v(x) - 2\ (**)$$

Zunächst lösen wir die homogene DGL $v'(x) = 2v(x)\ (*)$ durch Separation, d.h.

$$\int \frac{v'(x)}{v(x)}dx = \int 2dx \Longleftrightarrow \int \frac{1}{v(x)}dv(x) = \ln|v(x)| = 2x + C.$$

Wir erhalten durch Anwenden der Exponentialfunktion und Auflösen des Betrages die Lösung der homogenen DGL $(*)$

$$v_h(x) = Ke^{2x},\ K \in \mathbb{R}.$$

Durch Variation der Konstanten K lässt sich nun die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $(**)$ ermitteln. Wir machen den Ansatz $v(x) = K(x)e^{2x}$, dann ist

$$v'(x) = K'(x)e^{2x} + 2K(x)e^{2x},$$

und eingesetzt in $(**)$ ergibt sich

$$K'(x)e^{2x}+2K(x)e^{2x} = 2K(x)e^{2x}-2 \Longleftrightarrow K'(x) = -2e^{-2x} \Longrightarrow K(x) = \int K'(x)dx = -\int 2e^{-2x} = e^{-2x}+D,\ D \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$v(x) = (e^{-2x} + D)e^{2x} = 1 + De^{2x}.$$

Bemerkung: Auch hier kann man sich das Leben leichter machen und kommt ohne Variation der Konstanten aus, wenn man die DGL $v'(x) = 2v(x) - 2$ als autonome DGL erkennt mit $2v(x) - 2 = h(v(x))$ mit der Funktion $h(z) = 2z - 2$. Der Separationsansatz lautet dann

$$\int \frac{v'(x)}{2v(x)-2}dx = \frac{1}{2}\ln|v(x) - 1| = \int 1dx = x + C,\ C \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \ln|v(x) - 1| = 2x + K,\ K(= 2C) \in \mathbb{R}.$$

Wir wenden wie immer exp an, und erhalten $v(x) = D\exp(2x) + 1$ mit $D(= \pm\exp(K)) \in \mathbb{R}$.

Wir haben nun die allgemeine Lösung der DGL in $v(x)$ gefunden, und Rücksubstitution $y(x) = (v(x))^{-1/2}$ liefert eine allgemeine Lösung der ursprünglichen Bernulli-Gleichung:

$$y(x) = v(x)^{-1/2} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + De^{2x}}}.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = \frac{1}{2}$ impliziert

$$\frac{1}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + De^{2\cdot 0}}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+D}} \Longleftrightarrow D = 3.$$

Somit ist $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+3e^{2x}}}$ die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Wir teilen die Gleichung durch $x(y(x))^2$ und finden eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = -2$:

$$y'(x) = -\frac{1}{x}y(x) + \frac{x}{(y(x))^2}.$$

Hierbei müssen wir schon $x = 0$ ausschließen, da wir durch x teilen. Da uns zur Lösung des Anfangswertproblems eine Lösung $y(x)$ in einer Umgebung von $x = 1$ genügt, ist das kein Problem. Wenn wir also $y(x) = (u(x))^{1/3}$ und $y'(x) = \frac{1}{3}(u(x))^{-2/3}u'(x)$ in diese Gleichung einsetzen, finden wir die lineare inhomogene Differentialgleichung (mit Anfangsbedingung)

$$\frac{1}{3}u(x)^{-\frac{2}{3}}u'(x) = -\frac{1}{x}u(x)^{\frac{1}{3}} + xu(x)^{\frac{2}{3}} \Longleftrightarrow u'(x) = -\frac{3}{x}u(x) + 3x, \qquad u(1) = 1 \ (*).$$

Zunächst lösen wir wie üblich die zugehörige homogene Differentialgleichung $u'(x) = -\frac{3}{x}u(x)$, was mit einer Division durch $u(x)$ und Integration beider Seiten auf

$$\ln|u(x)| = -3\ln|x| + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

führt. Wir wenden auf beiden Seiten die Exponentialfunktion an, was

$$|u(x)| = e^C|x|^{-3} \qquad \text{bzw.} \qquad u(x) = \pm e^C x^{-3} \quad \text{für } x > 0$$

liefert. Damit haben wir nun Lösungen der homogenen DGL bestimmt. Beachte hier wieder, dass uns eine Lösung $u(x)$ in einer Umgebung von $x = 1$ genügt, weshalb wir uns auf $x > 0$ einschränken können.

Der Ansatz für eine allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung $(*)$ lautet also $u(x) = C(x)x^{-3}$ für $x > 0$ (Variation der Konstanten). Nach Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung $(*)$ ergibt sich mit $u'(x) = C'(x)x^{-3} - 3C(x)x^{-4}$:

$$C'(x)x^{-3} - 3C(x)x^{-4} = -\frac{3}{x}C(x)x^{-3} + 3x \Longleftrightarrow C'(x) = 3x^4$$
$$\Longrightarrow C(x) = \int C'(x)dx = \int 3x^4 dx = \frac{3}{5}x^5 + K,\ K \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist dann

$$u(x) = C(x)x^{-3} = (\frac{3}{5}x^5 + K)x^{-3} = \frac{3}{5}x^2 + \frac{K}{x^3},\ K \in \mathbb{R}.$$

Wir bestimmen die Konstante passend zum Anfangswert: Es ist $1 = u(1) = \frac{3}{5} + K$, also $K = \frac{2}{5}$. Durch Resubstitution ist schließlich

$$y(x) = \left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5x^3}\right)^{1/3}, \qquad x > 0,$$

die Lösung des Anfangswertproblems. Beachte, dass das Wurzelziehen legitim ist, da der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist.

Aufgabe 5: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen
(a) $y'(x) = -y(x) + xe^{-x} + 1, \quad x \in \mathbb{R}$,
(b) $x^2y'(x) = 1 - y(x), \quad x > 0$,
und die Lösungen der Anfangswertprobleme
(c) $y'(x) = e^{x - y(x) - e^{y(x)}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y(1) = 0$,
(d) $y'(x) = e^{y(x)}\sin(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 0$.
Lösung 5:

(a) Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet $y'(x) = -y(x)$. Durch Separation erhalten wir

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \ln|y(x)| = \int -1 dx = -x + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Anwenden der Exponentialfunktion und Auflösen des Betrages liefern die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y_h(x) = K\exp(-x), \ K \in \mathbb{R}.$$

Um nun eine Lösung der DGL $y'(x) = -y(x) + xe^{-x} + 1$ $(*)$ zu bestimmen, verwenden wir den Ansatz $y(x) = K(x)\exp(-x)$ (Variation der Konstanten). Dann ist

$$y'(x) = K'(x)\exp(-x) - K(x)\exp(-x),$$

und wir setzen diese Ausdrücke für $y(x)$ und $y'(x)$ in die DGL $(*)$ ein:

$$K'(x)\exp(-x) - K(x)\exp(-x) = -K(x)\exp(-x) + x\exp(-x) + 1 \Longleftrightarrow K'(x) = x + \exp(x)$$
$$\Longrightarrow K(x) = \int K'(x)dx = \int (x + \exp(x))dx = \frac{x^2}{2} + \exp(x) + D, \ D \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet folglich

$$y(x) = K(x)\exp(-x) = (\frac{x^2}{2} + \exp(x) + D)\exp(-x) = \exp(-x)\frac{x^2}{2} + D\exp(-x) + 1.$$

(b) Die homogene Differentialgleichung ist $y'(x) = -\frac{y(x)}{x^2}$. Separation liefert dann

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x^2} \Longrightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \ln|y(x)| = -\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Beachte, dass $x > 0$ vorausgesetzt ist, so dass der Ausdrücke $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x^2}$ wohldefiniert sind.
Durch Anwenden von exp erhalten wir $|y(x)| = \exp(x^{-1})\exp(C)$. Das führt zu der Lösung

$$y_h(x) = \exp(x^{-1})K, \ K \in \mathbb{R}$$

der homogenen DGL.
Der Ansatz für die Variation der Konstanten ist also $y(x) = K(x)\exp(x^{-1})$. Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung $x^2y'(x) = 1 - y(x)$ $(*)$ ergibt

$$x^2(K'(x)\exp(x^{-1}) - K(x)\exp(x^{-1})\frac{1}{x^2}) = 1 - K(x)\exp(x^{-1}) \Longleftrightarrow K'(x) = \frac{1}{x^2}\exp(-x^{-1})$$
$$\Longrightarrow K(x) = \int K'(x)dx = \int \frac{1}{x^2}\exp(-x^{-1})dx = \exp(-x^{-1}) + D, \ D \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist

$$y(x) = K(x)\exp(x^{-1}) = (\exp(-x^{-1}) + D)\exp(x^{-1}) = 1 + D\exp(x^{-1}), \ D \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $(*)$.

(c) Es ist

$$y'(x) = e^{x - y(x) - e^{y(x)}} = e^x \cdot e^{-y(x)} \cdot e^{-e^{y(x)}}.$$

Wir sehen, dass die DGL separabel ist und formen um:

$$y'(x) \cdot e^{y(x)} \cdot e^{e^{y(x)}} = e^x \Longrightarrow \int y'(x) \cdot e^{y(x)} \cdot e^{e^{y(x)}} dx = \int e^x dx = e^x + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Es gilt $(e^{e^{y(x)}})' = y'(x) \cdot e^{y(x)} \cdot e^{e^{y(x)}}$, somit erhalten wir die Gleichung

$$e^{e^{y(x)}} = e^x + C,$$

die wir durch zweimaliges anwenden des Logarithmus nach $y(x)$ auflösen. Die allgemeine Lösung der DGL lautet dann

$$y(x) = \ln(\ln(e^x + C)), \; C \in \mathbb{R}.$$

Das Anfangswertproblem ist $y(1) = 0$, so dass wir die Gleichung

$$0 = \ln(\ln(e^1 + C))$$

erhalten. Da ln den Wert 0 nur an der Stelle 1 annimmt, muss $\ln(e^1 + C) = 1$ gelten. Den Wert 1 nimmt ln aber nur an der Stelle e an, so dass $C = 0$ folgt.

Damit lautet die Lösung $y(x) = \ln(\ln(\exp(x))) = \ln(x)$. Diese Lösung existiert für alle $x > 0$.

(d) Die Differentialgleichung ist separabel, so dass wir den Ansatz

$$\frac{y'(x)}{e^{y(x)}} = \sin(x) \Longrightarrow \int \frac{y'(x)}{e^{y(x)}} dx = \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C, \; C \in \mathbb{R}$$

machen. Wegen $y'(x)dx = dy(x)$ und $\int e^{-y} dy = -e^{-y}$, folgt

$$-e^{-y(x)} = -\cos(x) + C \Longleftrightarrow e^{-y(x)} = \cos(x) - C, \; C \in \mathbb{R}.$$

Wir wenden ln an, und erhalten die allgemeine Lösung der DGL

$$y(x) = -\ln(\cos(x) - C), \; C \in \mathbb{R}.$$

Das Anfangswertproblem lautet $y(0) = 0$, so dass $0 = -\ln(\cos(0) - C) = -\ln(1 - C)$ gelten muss. Folglich ist $C = 0$. Da der ln nur für $x > 0$ definiert ist, existiert eine Lösung der Differentialgleichung, die die Anfangsbedingung erfüllt, im Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$, da dort der Kosinus positive Werte annimmt.