Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Peter Rupp
M.Sc. Jonathan Wunderlich

2. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2017/18

26. Oktober 2017

Abgabe bis 2. November 2017, 12:00 Uhr

Aufgabe 5 (K):
Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n := \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$ eine natürliche Zahl.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(iii) Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ nicht-negativ. Dann gilt die verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

(iv) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}.$$

Hinweis: Sie dürfen die folgende Formel (Pascalsches Dreieck) ohne Beweis verwenden:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad (n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N},\ k \leq n).$$

Aufgabe 6:

(i) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ teilt 6 die Zahl $n^3 + 5n$.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$ gilt $3^n \geq 2n^3$.

(ii) Zeigen Sie, dass für eine endliche Menge M gilt

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}.$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge, d.h die Menge aller Teilmengen von M.

Hinweis: Die leere Menge sowie die Menge M selbst sind immer Teilmengen von $\mathcal{P}(M)$ und $|A|$ bezeichnet die Mächtigkeit einer endlichen Menge A, d.h. die Anzahl der Elemente in A.

(iii) Beweisen Sie, dass für jede endliche nichtleere Menge M gilt:

$$|\{A \in \mathcal{P}(M) \colon\ |A| \text{ ist gerade}\}| = 2^{|M|-1}.$$

Aufgabe 7:

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (m,n) \mapsto n + \tfrac{1}{2}(n+m-1)(n+m-2)$$

bijektiv ist. Folgern Sie daraus, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Menge aller abgeschlossenen Intervalle mit rationalen Endpunkten abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 8 (K):

(i) Es sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Familie von abzählbaren Mengen. Zeigen Sie, dass auch die Vereinigung $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ abzählbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{A \subseteq \mathbb{N} \colon A \text{ oder } \mathbb{N} \setminus A \text{ ist endlich}\}$$

abzählbar unendlich ist.