

## 2. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2017/18

26. Oktober 2017

Abgabe bis 2. November 2017, 12:00 Uhr

### Aufgabe 5 (K):

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(i) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $a_n := \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$  eine natürliche Zahl.

(ii) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(iii) Seien  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  nicht-negativ. Dann gilt die verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i.$$

(iv) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und jedes  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq n$  gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^n \binom{m}{k}.$$

*Hinweis:* Sie dürfen die folgende Formel (Pascalsches Dreieck) ohne Beweis verwenden:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad (n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, k \leq n).$$

### Aufgabe 6:

(i) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  teilt 6 die Zahl  $n^3 + 5n$ .

(b) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 6$  gilt  $3^n \geq 2n^3$ .

(ii) Zeigen Sie, dass für eine endliche Menge  $M$  gilt

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}.$$

Hierbei bezeichnet  $\mathcal{P}(M)$  die Potenzmenge, d.h. die Menge aller Teilmengen von  $M$ .

*Hinweis:* Die leere Menge sowie die Menge  $M$  selbst sind immer Teilmengen von  $\mathcal{P}(M)$  und  $|A|$  bezeichnet die Mächtigkeit einer endlichen Menge  $A$ , d.h. die Anzahl der Elemente in  $A$ .

(iii) Beweisen Sie, dass für jede endliche nichtleere Menge  $M$  gilt:

$$|\{A \in \mathcal{P}(M) : |A| \text{ ist gerade}\}| = 2^{|M|-1}.$$

### Aufgabe 7:

- (i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (m, n) \mapsto n + \frac{1}{2}(n + m - 1)(n + m - 2)$$

bijektiv ist. Folgern Sie daraus, dass  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar ist.

- (ii) Zeigen Sie, dass die Menge aller abgeschlossenen Intervalle mit rationalen Endpunkten abzählbar unendlich ist.

### Aufgabe 8 (K):

- (i) Es sei  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Familie von abzählbaren Mengen. Zeigen Sie, dass auch die Vereinigung  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  abzählbar ist.

- (ii) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ oder } \mathbb{N} \setminus A \text{ ist endlich}\}$$

abzählbar unendlich ist.



Du bist auf Festen immer mit dabei und fragst dich, was da im Hintergrund ablaufen muss? Dir macht es Spaß, mit anderen Leuten zu planen und selbst Sachen auf die Beine zu stellen? Oder du hast vielleicht selbst schon Feste organisiert? Dann schau doch einfach vorbei am **30.10.2017 um 19:30 Uhr im Raum -120, Geb. 50.34** zum ersten Orgatreffen für das Eulenfest, das Winterfest der Fachschaft Mathematik / Informatik. Das Fest wird traditionell von Erstsemestern gestaltet und organisiert, mit Unterstützung von festerfahrenen Studierenden. Falls du schon irgendwelche Ideen hast oder dich bei der Organisation beteiligen willst, freuen wir uns auf dich!