Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Peter Rupp
M.Sc. Jonathan Wunderlich

3. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2017/18

2. November 2017

Abgabe bis 9. November 2017, 12:00 Uhr

Aufgabe 9:

(i) Geben Sie jeweils reelle Folgen mit den folgenden Eigenschaften an. Finden Sie, falls möglich, in (b)-(e) sowohl ein Beispiel mit einer beschränkten, als auch mit einer unbeschränkten Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und divergent.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sowie $a_{2n} = b_{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sowie $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sowie $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent

(e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind jeweils divergent sowie $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(ii) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \geq 0$. Untersuchen Sie die Folgen mit den nachstehenden Folgengliedern auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(a) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$,

(b) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ b_n := \sqrt{n^2 + \alpha n + \beta}$.

Aufgabe 10 (K):

Seien $a, b \in \mathbb{R},\ 0 \leq a \leq b$. Untersuchen Sie die Folgen mit den nachstehenden Folgengliedern auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(i) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n := (1 + (-1)^n)^n$,

(ii) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ b_n := \sqrt{n^2+1} - n$,

(iii) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ c_n := \frac{-(n+1)^3 + (n+3)^2 + 3}{3n^3 + 2n^2 - 11}$,

(iv) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ d_n := \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

Aufgabe 11 (K):

(i) Zeigen Sie, dass die Folgen mit den nachstehenden Folgengliedern divergieren.

(a) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n := \frac{n^n}{n!}$,

(b) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ b_n := (-1)^n - \frac{1}{n}$.

(ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n := \frac{4n(n+2)}{(n+1)^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie ohne Benutzung von Satz 6.2, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, indem Sie die Definition der Konvergenz direkt nachrechnen, d.h. indem Sie für ein geeignetes $a \in \mathbb{R}$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

(iii) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, dann konvergiert auch die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Gilt das auch, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen anderen Wert als 0 konvergiert?

(iv) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Beweisen Sie die Existenz einer maximierenden Folge, d.h. einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

Aufgabe 12:

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Zeigen Sie

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to a \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $a = 0$.

(ii) Entscheiden Sie jeweils (Beweis oder Gegenbeispiel), ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

(a) $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$, (b) $|a_n| < \sqrt[n]{\varepsilon}$, (c) $|a_n| < \varepsilon^2 + \varepsilon + 3\sqrt{\varepsilon}$.