Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Peter Rupp
M.Sc. Jonathan Wunderlich

4. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2017/18

9. November 2017

Abgabe bis 16. November 2017, 12:00 Uhr

Aufgabe 13:

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, für die gilt:

(1) $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren,

(2) $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Zeigen Sie, dass dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass die Aussage in (i) falsch ist, wenn nur (1), aber nicht (2) gefordert wird.

Aufgabe 14 (K):

(i) Bestimmen Sie die Anfangswerte $a_1 \in [0,\infty)$ für welche die durch

$$a_{n+1} := 1 + \frac{{a_n}^2}{4} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Berechnen Sie auch die jeweiligen Grenzwerte.

(ii) Für ein $x \geq 0$ sei die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bei gegebenem $b_1 > \sqrt{x}$ rekursiv definiert durch

$$b_{n+1} := \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{x}{b_n}\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_n > \sqrt{x}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{x}$ gilt.

Aufgabe 15:

Beweisen Sie, dass eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge (d.h. Teilfolge der Teilfolge) besitzt, die gegen a konvergiert.

Aufgabe 16 (K):

(i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, beschränkte Folge und H bezeichne die Menge aller Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass für jede konvergente Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \in H$.

(ii) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller Häufungswerte der Folgen mit den nachstehenden Folgengliedern und beweisen Sie Ihre Aussagen:

(a) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n := \left(\frac{1}{n+1} - 1\right)^n$,

(b) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ b_n := \sqrt[n]{n + (-1)^n n}$,

(c) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ c_n := 8^{-n}(12n^{-1} + \frac{6n+1}{n^3} + 8)^n$,

(d) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ d_n := \begin{cases} 1 + 2^{-n} & \text{für } n = 3k,\ k \in \mathbb{N} \\ 2 + \frac{n+1}{n} & \text{für } n = 3k-1,\ k \in \mathbb{N}. \\ (1+\frac{1}{n})^{-2n} & \text{für } n = 3k-2,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$