Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Peter Rupp
M.Sc. Jonathan Wunderlich

5. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2017/18

16. November 2017

Abgabe bis 23. November 2017, 12:00 Uhr

Aufgabe 17 (K):
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle und beschränkte Folge. Zeigen Sie:

(i) Die Folge $\big(\sup\limits_{k\geq n} a_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt, und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k.$$

(ii) Die Folge $\big(\inf\limits_{k\geq n} a_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt, und es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Aufgabe 18:
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle und beschränkte Folgen.

(i) Beweisen Sie, dass $\liminf\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt.

(ii) Beweisen Sie, dass $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$ gilt.

(iii) Beweisen Sie, dass $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$ gilt.

Aufgabe 19 (K):
Bestimmen Sie, falls möglich, für die nachstehenden Folgen den Limes superior, bzw. Limes inferior. Sind die nachstehenden Folgen auch konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(i) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n := \begin{cases} 2+\sqrt[n+1]{2} & \text{für } n=3k,\ k\in\mathbb{N} \\ 2+\frac{1-n}{n} & \text{für } n=3k-1,\ k\in\mathbb{N}, \\ 2+\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{für } n=3k-2,\ k\in\mathbb{N} \end{cases}$

(ii) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ b_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k$,

(iii) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ c_n := (1+(-1)^n)(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

(iv) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ d_n := (1+(-2)^{-n})^{-1}$.

Aufgabe 20:

(i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge so, dass für jedes $p \in \mathbb{N}$

$$a_{p+n} - a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

gilt. Ist dann die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent?

(ii) Es seien $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $q \in (0,1)$ mit

$$|b_{n+1} - b_n| < q^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.