Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Peter Rupp
M.Sc. Jonathan Wunderlich

6. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2017/18

23. November 2017

Abgabe bis 30. November 2017, 12:00 Uhr

Aufgabe 21:
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls deren Reihenwert.

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$, (ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} 2^{-k} \right)$,

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$, (iv) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-(n+k)} \right)$.

Aufgabe 22 (K):

(i) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent.

(ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, nicht-negative Folge.

(a) Zeigen Sie: Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so gilt $\inf\{n\, a_n : n \geq k\} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Gilt auch die Umkehrung von (a)?

Aufgabe 23 (K):
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz.

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$, (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$,

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n}$,

(v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, (vi) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+2)^2}$.

Aufgabe 24:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

(i) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

(2) Es gibt eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: Majorantenkriterium.

(ii) Gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \frac{2}{n}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_1 := 1$ und $c_{n+1} := \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.