Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Peter Rupp
M.Sc. Jonathan Wunderlich

7. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2017/18

30. November 2017

Abgabe bis 7. Dezember 2017, 12:00 Uhr

Aufgabe 25 (K):

(i) Geben Sie jeweils eine nicht-negative Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften an.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert und $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ divergiert.

Warum widerspricht die Existenz dieser Folgen nicht dem Cauchyschen Verdichtungssatz?

(ii) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, sodass die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergieren. Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ absolut konvergent ist.

(iii) Berechnen Sie unter Verwendung von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (das müssen Sie nicht beweisen) den Reihenwert von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Aufgabe 26:

(i) Berechnen Sie das Cauchy-Produkt der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

und dessen Reihenwert.

(ii) Zeigen Sie, dass die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{\frac{2}{3}}} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{\frac{1}{3}}}$$

konvergieren, ihr Cauchy-Produkt aber divergiert.

Aufgabe 27 (K):

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren, bzw. divergieren die folgenden Potenzreihen?

(i) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}(x-1)^n$,

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$,

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n} x^{3n}$,

(iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{n^2}$.

Aufgabe 28:

(i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Reihenwert.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

Hinweis: Nutzen Sie in (a) die Potenzreihendarstellung von $\frac{1}{(1-x)^2}$ aus der Vorlesung. Führen Sie (b) auf den Fall in (a) zurück indem Sie zunächst

$$n^2 = 2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - n$$

beweisen und dann die Cauchy-Produkt-Formel anwenden.

(ii) Welche Funktion wird durch die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} x^n$$

dargestellt?

(iii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit $\liminf_{n\to\infty} |a_n| > 0$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Änderungen beim Lernraum Mathematik

Beginnend mit der Kalenderwoche 49 (ab dem 4. Dezember) wird es eine Änderung der Betreuungszeiten geben. Anstelle des Termins **Dienstag, 14:00-15:30 Uhr** wird dann der Termin **Montag, 14:00-15:30 Uhr** durch Pascal Zschumme betreut werden. Zum selbstständigen Arbeiten stehen Ihnen weiterhin beide Termine zur Verfügung.

In Folgenden finden Sie eine Liste mit den ab der Kalenderwoche 49 geltenden Betreuungszeiten:

Tag	**Uhrzeit**	**Raum**	**Betreuer**
Montag	09:45-11:15	SR 2.066	-
Montag	14:00-15:30	SR 3.061	Pascal Zschumme
Dienstag	14:00-15:30	SR 0.016	-
Mittwoch	14:00-15:30	SR 2.058	-
Donnerstag	11:30-13:00	SR 3.061	Benjamin Waßermann
Donnerstag	14:00-17:15	SR 2.066	-
Freitag	11:30-13:00	SR 2.067	Fabian Hornung