Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Peter Rupp
M.Sc. Jonathan Wunderlich

8. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2017/18

7. Dezember 2017

Abgabe bis 14. Dezember 2017, 12:00 Uhr

Aufgabe 29:
Entwickeln Sie die durch die folgenden Abbildungsvorschriften definierten Funktionen in Potenzreihen um $x_0 = 0$ und berechnen Sie den Konvergenzradius.

(i) $x \mapsto \frac{x}{x^2-3x+2}$, (ii) $x \mapsto \frac{e^x}{1-x}$.

Hinweis: Verwenden Sie in (i) eine Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 30 (K):

(i) Geben Sie diejenige dyadische (2-adische) Entwicklung mit 8 Nachkommastellen an, die die Dezimalentwicklung 0,18279 am besten approximiert. Wie groß ist der Fehler?

(ii) Geben Sie die gefundene dyadische Entwicklung als 16-adische Entwicklung an, wobei für die Ziffern $10, \dots, 15$ die Buchstaben $A, \dots, F$ verwendet werden sollen.

(iii) Es sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 3$ und 0,212212... (d.h. der Ziffernblock 212 wiederholt sich periodisch) die q-adische Entwicklung einer Zahl $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie von q abhängige Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = \frac{m}{n}$.

Aufgabe 31 (K):

(i) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren.

(a) $\lim\limits_{x\to 0-} -3(\frac{1}{x}+2)(\frac{1}{x^2}-9)\,|x|^3$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+3}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+nx)^n-(1+n^2x)}{x^2}$.

(ii) Es seien $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^2$ existiert $\quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert.

(b) f ist beschränkt und $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x)) = 0$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x))$ und $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))$ existieren $\quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to 0}(f(x)-g(x))^2$ existiert.

Aufgabe 32:

(i) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Weiter sei $x_0 \in (a,b)$ und $w \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
Es gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = w$ genau dann, wenn $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = w$ und $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = w$.

(ii) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta \geq 0$. Zeigen Sie, dass die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie deren Wert.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ mit $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{x^2}{|x|}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ mit $g\colon \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{\sqrt{1+\alpha|x-2|+\beta(x-2)^2}-1}{|x-2|}$.