Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Peter Rupp
M.Sc. Jonathan Wunderlich

9. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2017/18

14. Dezember 2017

Abgabe bis 21. Dezember 2017, 12:00 Uhr

Raumänderung am 21.12.2017

Am **21.12.2017** findet die Vorlesung nicht wie üblich im Neuen Chemie Hörsaal statt, sondern wird einmalig in den **Fritz-Haller Hörsaal (HS37)** (Gebäude 20.40) verlegt.

Aufgabe 33:

(i) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f in jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig ist.

(b) Begründen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass f in 0 stetig ist.

(ii) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $g(x+y) = g(x) + g(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgende Äquivalenz

$$g \text{ ist stetig auf } \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad g \text{ ist stetig in } 0.$$

Aufgabe 34 (K):

(i) Bestimmen sie alle $x \in \mathbb{R}$ in den die folgende Funktion stetig ist:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} \frac{x^3-x^2-9x+9}{x^2+2x-3}, & x \in (-\infty, 3] \setminus \{-3, 1\} \\ \mathrm{e}^{3-x} - 1, & x \in (3, \infty) \\ 6, & x = -3 \\ -2, & x = 1 \end{cases}.$$

(ii) Gegeben sei die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4}{x^2 - x - 2} \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, \quad g(-1) := \alpha,\ g(2) := \beta.$$

Bestimmen Sie α und β so, dass g stetig auf $\mathbb{R}$ ist und beweisen Sie Ihre Aussage.

(iii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ in denen die folgende Funktion stetig ist:

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) := \begin{cases} \frac{x^2+2x}{x^2-x-6}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ \frac{x^2+3x+5}{x^2+1}, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Aufgabe 35 (K):

(i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = -1$ und $f(x+y) \leq -f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$f \text{ ist stetig auf } \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad f \text{ ist stetig in } 0.$$

(ii) Die Funktionen $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ seien auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ stetig. Ferner gelte $f(x)^2 = g(x)^2$ und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass entweder $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$ oder $f(x) = -g(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Aufgabe 36:
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(i) Es seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f(b) \leq g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [a, b]$ existiert, sodass $f(x_0) = g(x_0)$ gilt.

(ii) Es sei $f\colon [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. ein $x_0 \in [a, b]$ existiert mit $f(x_0) = x_0$.