Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Peter Rupp
M.Sc. Jonathan Wunderlich

# 10. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2017/18

21. Dezember 2017

**Abgabe bis 11. Januar 2018, 12:00 Uhr**

## Anmeldung zum Übungsschein Analysis I

Die Anmeldung zum Übungschein ist ab sofort möglich. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

**Anmeldeschluss** ist der **08.02.2018**. Nähere Informationen finden Sie auf dem zweiten Merkblatt auf der Vorlesungshomepage.

**Aufgabe 37 (K):**

(i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie die paarweise Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) $f$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

(2) Für jede offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(O)$ offen.

(3) Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

*Hinweis:* Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ gilt $f^{-1}(M) := \{x \in \mathbb{R} \colon f(x) \in M\}$.

(ii) Es seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A$ ist beschränkt $\quad\Rightarrow\quad$ $f(A)$ ist beschränkt.

(b) $B$ ist beschränkt $\quad\Rightarrow\quad$ $f^{-1}(B)$ ist beschränkt.

(iii) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass $M$ genau dann beschränkt und abgeschlossen ist, wenn jede stetige Funktion auf $M$ beschränkt ist.

**Aufgabe 38:**

(i) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Familie abgeschlossener Mengen in $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ und $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ abgeschlossen sind.

(b) Ist auch $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ abgeschlossen?

(ii) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $(O_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Familie offener Mengen in $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\bigcap_{j=1}^{n} O_j$ und $\bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$ offen sind.

(b) Ist auch $\bigcap_{j=1}^{\infty} O_j$ offen?

(iii) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so besitzt $f$ einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = x_0$.

**Aufgabe 39 (K):**

(i) Es sei $\alpha > 0$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren.

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \log(x)$,   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}}$.

(ii) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$ und $0 \leq a < 1$. Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(a) $f_n\colon [a,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \frac{\alpha n (nx)^2}{\beta + (nx)^3}$,   (b) $f_n\colon [a,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \alpha \sqrt[n]{\beta n^2 (1-x)}$.

(iii) Es seien $R \in \mathbb{R}$ und $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\tilde{f} \not\equiv 0$ und $\tilde{f}(x) = 0$ für alle $x \leq R$. Weiter sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \tilde{f}(x-n)$. Untersuchen Sie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(iv) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sowie $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Folge monoton wachsender Funktionen mit

(1) $f_n(a) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,   (2) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(b) = 0$.

Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen 0 konvergiert.

**Aufgabe 40:**

(i) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen und -reihen jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(a) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \frac{2x}{1+(nx)^2}$,

(b) $g_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ g_n(x) := nxe^{-nx}$,

(c) $\sum_{n=1}^\infty h_n(x)$, $h_n\colon (-1,1] \to \mathbb{R},\ h_n(x) := x^n(1-x)$,

(d) $\sum_{n=1}^\infty i_n(x)$, $i_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i_n(x) := \frac{1}{n^2+x^2}$.

(ii) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $f_n\colon D \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Konvergiert $\sum_{n=0}^\infty f_n$ gleichmäßig auf $D$, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $D$ gegen 0.

# Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!