Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Peter Rupp
M.Sc. Jonathan Wunderlich

11. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2017/18

11. Januar 2018

Abgabe bis 18. Januar 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 41 (K):

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{x}{1+x^2}$$
gleichmäßig stetig ist.

(ii) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. Weiter existiere für die Funktion $g\colon D \to \mathbb{R}$ ein $L \geq 0$ mit
$$|g(x) - g(y)| \leq L\sqrt{|x-y|} \qquad \text{für alle } x, y \in D.$$
Zeigen Sie, dass g gleichmäßig stetig ist.

(iii) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner sei $h\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass h genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn $\lim\limits_{x\to b-} h(x)$ existiert.

Aufgabe 42:

(i) (a) Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $|f'(x)| \leq K$ für alle $x \in I$. Beweisen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist mit Lipschitzkonstante $L = K$.

(b) Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ Lipschitz-stetig ist. Geben Sie eine mögliche Lipschitzkonstante L an.

(ii) Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass Konstanten $a, b \geq 0$ existieren mit
$$|g(x)| \leq a + b\,|x| \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 43 (K):

(i) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Bestimmen Sie alle $x \in I$, in denen die folgenden Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie dort deren Ableitung.

(a) $I := (0, \infty)$ und $f(x) := \frac{\mathrm{e}^{2^x} x^2}{\log(x)}$.

(b) $I := (1, \infty)$ und $f(x) := \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x^2}}$.

(c) $I := \mathbb{R}$ und
$$f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+1)}, & x \in (-\infty, -1) \\ x^2, & x \in [-1, 0) \\ x^4, & x \in [0, \infty) \end{cases}$$

(ii) Zeigen Sie die folgenden Abschätzungen:

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ gilt
$$(y-x)(y+x)\mathrm{e}^{y^2} \geq \mathrm{e}^{y^2} - \mathrm{e}^{x^2}.$$

(b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ gilt
$$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{y}} \leq (y-x)\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

(iii) Es seien $p > 0$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := |x|^p$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:
$$g \text{ ist differenzierbar in } 0 \quad \Leftrightarrow \quad p > 1.$$

Aufgabe 44:

(i) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Bestimmen Sie alle $x \in I$, in denen die folgenden Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie dort deren Ableitung.

(a) $I := (1, \infty)$ und $f(x) := \frac{x e^{x^2}}{x^2 \log x}$.

(b) $I := (0, \infty)$ und $f(x) := 3^{4^x} 4^{3^x}$.

(c) $I := \mathbb{R}$ und

$$f(x) := \begin{cases} |x|^3, & x \in (-\infty, 1), \\ x^2, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

(ii) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktion f sei stetig in 0 und g sei differenzierbar in 0 mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $g \cdot f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x)f(x)$ in 0 differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.

Anmeldung zum Übungsschein Analysis I

Die Anmeldung zum Übungschein ist ab sofort möglich. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **08.02.2018**. Nähere Informationen finden Sie auf dem zweiten Merkblatt auf der Vorlesungshomepage.