Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Peter Rupp
M.Sc. Jonathan Wunderlich

13. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2017/18

25. Januar 2018

Abgabe bis 1. Februar 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 49 (K):

(i) Zeigen Sie die folgende Abschätzung:

$$\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \qquad \text{für alle } x \in [0,\infty).$$

(ii) Es sei $f \in \mathrm{C}^2([0,2])$ und es gelte $|f(x)| \leq 1$, sowie $|f''(x)| \leq 1$ für alle $x \in [0,2]$. Zeigen Sie:

$$|f'(x)| \leq 2 \qquad \text{für alle } x \in [0,2].$$

(iii) Es sei $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ und $\delta_h(x) := \frac{1}{h^2}\left(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\right)$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{h\to 0} \delta_h(x) = f''(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 50:

(i) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in \mathrm{C}^n(\mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, h^k + r(h)$$

für alle $h \in \mathbb{R}$ und $\frac{r(h)}{h^n} \to 0$ $(h \to 0)$.

(ii) Die Funktion $g\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ für alle $x \in (-1,\infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(x;\frac{1}{2})$ und geben Sie (mit Begründung) eine Konstante $C > 0$ an, für die

$$\left|g(x) - T_2(x;\tfrac{1}{2})\right| \leq C\left|x - \tfrac{1}{2}\right|^3$$

für alle $x \in [0,1]$ gilt.

Aufgabe 51 (K):

(i) Zeigen Sie mit Hilfe von Ober- und Untersummen, dass die folgenden Integrale existieren und bestimmen Sie jeweils den Wert des Integrals.

(a) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\, dx$, (b) $\int_{-1}^1 x^2\, dx$.

(ii) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie:

$$S_{(-f)} = -S_f \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist integrierbar.}$$

(iii) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $\int_a^b g(x)\, dx > 0$. Beweisen Sie, dass ein Intervall $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ mit $\alpha < \beta$ existiert, sodass $g > 0$ auf $[\alpha,\beta]$ gilt.

Aufgabe 52:
Bestimmen Sie die Ober- und Untersummen auf dem Intervall $[0,1]$ für die folgenden Funktionen. Sind die Funktionen integrierbar?

(i) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \left(\lim\limits_{m\to\infty} (\cos(\pi n! x))^{2m} \right)$.

(ii) $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ mit teilerfremden } p, q \in \mathbb{N} \end{cases}$

Anmeldung zum Übungsschein Analysis I

Die Anmeldung zum Übungschein ist ab sofort möglich. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **08.02.2018**. Nähere Informationen finden Sie auf dem zweiten Merkblatt auf der Vorlesungshomepage.