Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Peter Rupp
M.Sc. Jonathan Wunderlich

14. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2017/18

1. Februar 2018

Abgabe bis 8. Februar 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 53 (K):

(i) Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Zeigen Sie die folgende Abschätzung

$$\int_0^1 |f'(x) - f(x)| \; dx \geq \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $F\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ F(x) := f(x)\mathrm{e}^{-x}$.

(ii) Die Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} [\frac{1}{x}]x, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $g \in \mathrm{R}[0,1]$ gilt und berechnen Sie $\int_0^1 g(x) \; dx$.

Aufgabe 54:

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und integrierbar ist, und dass gilt:

$$\int_a^b f(x) \; dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x) \; dx = bf(b) - af(a).$$

Aufgabe 55 (K):

(i) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in \mathrm{C}^1([a,b])$. Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe des 1. Hauptsatzes, indem Sie jeweils eine Stammfunktion ermitteln.

(a) $\int_0^1 \frac{9x^2-4x}{3x^3-2x^2+1} \; dx$,

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)(1+\sin(x))\mathrm{e}^{\sin(x)} \; dx$,

(c) $\int_a^b \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} \; dx$, falls $\frac{\pi}{2} + k\pi \notin f([a,b])$ für alle $k \in \mathbb{Z}$,

(d) $\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} \; dx$.

(ii) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) = 0$$

im Intervall $[0, \pi]$ mindestens eine Lösung hat.

Aufgabe 56:

(i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Finden Sie ein Beispiel für

(a) eine Funktion $f \in \mathrm{R}[a, b]$, die weder monoton noch stetig ist.

(b) eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $|f| \in \mathrm{R}[a, b]$ und $f \notin \mathrm{R}[a, b]$.

(c) eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in \mathrm{R}[a, b]$, die punktweise und nicht gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert mit $f \in \mathrm{R}[a, b]$.

(ii) Es sei $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [-1, 0) \\ 1, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

und $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie eine Funktion $f_\varepsilon \in \mathrm{C}([-1, 1])$ mit

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - f_\varepsilon(x)| \, dx < \varepsilon.$$

Anmeldung zum Übungsschein Analysis I

Die Anmeldung zum Übungsschein ist noch bis zum **08.02.2018** unter

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

möglich.

Anmeldung zur Klausur Analysis I

Sobald die Übungsscheine verbucht sind, können Sie sich zur Klausur Analysis I anmelden. Die Anmeldung erfolgt ebenfalls über das Online-Portal (siehe oben). Ausnahmen sind Schülerstudierende, die sich bei Frau Ewald (Zimmer 3.029) persönlich anmelden.

Anmeldeschluss ist der **28.02.2018**.

Nähere Informationen finden Sie auf dem zweiten Merkblatt auf der Vorlesungshomepage.