Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

3. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2018

3. Mai 2018

Abgabe bis 11. Mai 2018, 13:15 Uhr

Aufgabe 9 (K):

(i) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $A, B \neq \emptyset$. Man definiert den Abstand von A und B durch

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{\|a-b\| : a \in A, b \in B\}.$$

Zeigen Sie: Sind A, B kompakt, so existieren $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ mit $\operatorname{dist}(A, B) = \|a_0 - b_0\|$.

(ii) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $A \subseteq D$ heißt *relativ offen (relativ abgeschlossen) in* D (oder auch *offen (abgeschlossen) in* D), falls es eine offene (abgeschlossene) Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit $A = D \cap B$.

(a) Sei $U \subseteq D$, $U \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass U genau dann relativ offen in D ist, wenn zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert mit $D \cap V \subseteq U$.

(b) Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ genau dann stetig ist, wenn für jede offene Teilmenge $O \subseteq \mathbb{R}^m$ das Urbild $f^{-1}(O) := \{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) \in O\}$ relativ offen in D ist.

Aufgabe 10 (K):

(i) Es sei $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon z \neq 0\}$. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{xe^y}{z}$.

(ii) Die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(b) Beweisen Sie, dass die partiellen Ableitungen $g_{xy}(0, 0)$ und $g_{yx}(0, 0)$ existieren, aber nicht übereinstimmen.

Aufgabe 11:

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^2y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie f_x sowie f_y. Sind diese beiden partiellen Ableitungen im Punkt $(0, 0)$ stetig?

(ii) Untersuchen Sie die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} \sin(xy^2 - x^2y), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

auf Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit im Punkt $(0, 0)$ und geben Sie gegebenenfalls den Gradienten an.

Aufgabe 12:

(i) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \log(\sqrt{x^2+y^2})$. Zeigen Sie:

$$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0 \qquad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}\,.$$

(ii) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und $g\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := \|x\|^{2-n}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{j=1}^{n} g_{x_j x_j}(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,.$$