Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

4. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2018

10. Mai 2018

Abgabe bis 17. Mai 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 13 (K):
In welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ sind die folgenden Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar? Geben Sie außerdem die Ableitungen, soweit sie existieren, an.

(i) $f(x,y) := |x| + |y|$,

(ii) $g(x,y) := \|(x,y)\|$,

(iii) $h(x,y) := \max\{|x|, |y|\}$.

Aufgabe 14:

(i) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gibt mit

$$f_x(x,y) = xy, \; f_y(x,y) = y^2 \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $u\colon (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(t,x) := (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$. Zeigen Sie, dass u zweimal stetig partiell differenzierbar ist und die Gleichung

$$u_t(t,x) = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}(t,x)$$

für alle $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ erfüllt.

Aufgabe 15:
Es seien $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y > 0\right\}$ und $E := \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \colon w > 0\right\}$. Weiter seien die Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon E \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := (\log(xy), \cos(x^2 + y), \mathrm{e}^x),$$
$$g(u,v,w) := \mathrm{e}^u + vw + \log(w).$$

Zeigen Sie, dass $h := g \circ f$ auf D differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung

(i) nach der Kettenregel,

(ii) direkt, indem Sie $h(x,y)$ zunächst explizit berechnen und dann ableiten.

Aufgabe 16 (K):

(i) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^4 - y^4)\cos\left(\frac{1}{\|(x,y)\|^3}\right) & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$. Geben Sie außerdem die Ableitung an.

(b) Zeigen Sie: $f \notin \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(ii) Es sei $n \in \mathbb{N}$, M eine reelle $n \times n$-Matrix und $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := x \cdot (Mx)$. Zeigen Sie, dass g auf $\mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung $g'(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$.