**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

# 5. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2018

17. Mai 2018

**Abgabe bis 24. Mai 2018, 12:00 Uhr**

**Aufgabe 17 (K):**

(i) Es sei $D := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0,\ \|x\| < 2\} \setminus [0,1]^2$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es existiere ein $M > 0$ mit $\|f'(x))\| \leq M$ für alle $x \in D$. Zeigen Sie:

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{2}M\,\|x-y\| \qquad \text{für alle } x, y \in D.$$

(ii) Es seien $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $g\colon I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Ferner seien die partiellen Ableitungen $g_x, g_y$ beschränkt. Zeigen Sie, dass $g$ stetig auf $I_1 \times I_2$ ist.

**Aufgabe 18 (K):**

(i) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial a}$ im Nullpunkt existieren und berechnen Sie diese.

(b) Ist $f$ in $(0,0)$ differenzierbar?

(ii) Es seien $Q := (0,\infty)^2$, sowie $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \sqrt{\|(x,y)\| + 1}, & (x,y) \in Q, \\ \cos(\|(x,y)\|), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus Q. \end{cases}$$

Für welche Richtungsvektoren $a \in \mathbb{R}^2$ mit $\|a\| = 1$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial a}(0,0)$?

**Aufgabe 19:**

(i) Es seien $d, m, n \in \mathbb{N}$, sowie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $E \subseteq \mathbb{R}^m$ beide offen und nichtleer. Weiter seien $f\colon D \to \mathbb{R}^d$ und $g\colon E \to \mathbb{R}^d$ differenzierbar auf ihren Definitionsbereichen. Zeigen Sie, dass

$$F\colon D \times E \to \mathbb{R},\ F(x,y) := f(x) \cdot g(y)$$

differenzierbar ist und drücken Sie die Ableitung von $F$ durch die Ableitungen von $f$ und $g$ aus.

(ii) Es sei $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi$ differenzierbar ist und berechnen Sie $\Phi'$.

(b) Für welche $(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3$ ist die Jacobimatrix $\Phi'(r,\varphi,\theta)$ invertierbar?

**Aufgabe 20:**

Gegeben seien die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + 3xy - 5y^2$ und $a := \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.

(i) Zeigen Sie, dass für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial a}(x,y)$ existiert und berechnen Sie diese.

(ii) Zeigen Sie, dass $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) := f(\cos(t), \sin(t))$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

(iii) Zeigen Sie, dass für alle $(x,y), (\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ mit $\max\{\|(x,y)\|, \|(\tilde{x},\tilde{y})\|\} \leq 1$ gilt

$$|f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})| \leq \sqrt{133}\,\|(x,y) - (\tilde{x},\tilde{y})\|.$$

## Anmeldung zum Übungsschein Analysis II

Die Anmeldung zum Übungsschein ist ab **23.05.2018** freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **20.07.2018**.

## Anmeldung zur Klausur Analysis II

Die Klausur Analysis II findet statt am **27.09.2018** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Sobald die Übungsscheine verbucht sind, können Sie sich zur Klausur Analysis II anmelden. Die Anmeldung erfolgt ebenfalls über das Online-Portal (siehe oben). Ausnahmen sind Schülerstudierende, die sich bei Frau Ewald (Zimmer 3.029) persönlich anmelden.

Anmeldeschluss ist der **13.09.2018**.