Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

# 6. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2018

24. Mai 2018

**Abgabe bis 1. Juni 2018, 13:15 Uhr**

**Aufgabe 21:**

(i) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und offen, sowie $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar auf $D$ und außerdem Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass die Jacobimatrix $J_f$ auf $D$ beschränkt ist, das heißt es existiert ein $C \geq 0$ mit $\|J_f(x)\| \leq C$ für alle $x \in D$.

(ii) Es seien $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x, y) := yg(x)$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$h \text{ ist in } (0,0) \text{ differenzierbar} \quad \Leftrightarrow \quad g \text{ ist in } 0 \text{ stetig.}$$

(iii) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Weiter existiere ein $p > 0$ mit $u(tx) = t^p u(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Zeigen Sie, dass dann $u'(x) \cdot x = pu(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

**Aufgabe 22 (K):**

(i) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := \sin(x\mathrm{e}^y)$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung im Nullpunkt, d.h. bestimmen Sie

$$T_2((x,y);(0,0)) := \sum_{k=0}^{2} \frac{((x,y)\cdot\nabla)^k f(0,0)}{k!}.$$

(b) Existiert der Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - T_2((x,y);(0,0))}{\|(x,y)\|^3}?$$

(ii) Es sei $g\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) := x^y$.

(a) Berechnen Sie eine Näherung an $1.05^{1.02}$ mit Hilfe des Taylorpolynoms 2. Ordnung von $g$ im Punkt $(1, 1)$.

(b) Zeigen Sie, dass der Fehler der Näherung aus (a) kleiner ist als $7 \cdot 10^{-5}$.
*Hinweis:* Abschätzungen der folgenden Bauart können Ihnen bei der Fehlerabschätzung weiterhelfen:

$$\text{Für } \tau \in (0,1) \text{ gilt: } (1 + \tau 0.05)^{1+\tau 0.02} \leq 1.05^2.$$

**Aufgabe 23:**

(i) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A$ eine reelle symmetrische $(n \times n)$-Matrix, deren quadratische Form $Q_A$ indefinit ist. Zeigen Sie, dass ein $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $Q_A(x) = 0$ existiert.

(ii) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $M$ eine reelle (nicht notwendig symmetrische) $(n \times n)$-Matrix, sowie $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x \cdot (Mx)$.

(a) Zeigen Sie, dass genau eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix $A$ existiert mit $f(x) = Q_A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Berechnen Sie zu $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ diese Matrix $A$.

**Aufgabe 24 (K):**

(i) Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und nicht leer, sowie $f \in \mathrm{C}^2(D, \mathbb{R})$. Ferner gelte

$$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(x,y) \neq 0 \quad \text{für alle } (x,y) \in D.$$

Zeigen Sie, dass $f$ in $D$ kein relatives Extremum besitzt.

(ii) Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) := x^3 - y^2 + 2xy - x$. Bestimmen Sie die Lage und Art aller relativen Extremstellen von $g$.

## Anmeldung zum Übungsschein Analysis II

Die Anmeldung zum Übungsschein ist ab **23.05.2018** freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **20.07.2018**.

## Anmeldung zur Klausur Analysis II

Die Klausur Analysis II findet statt am **27.09.2018** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Sobald die Übungsscheine verbucht sind, können Sie sich zur Klausur Analysis II anmelden. Die Anmeldung erfolgt ebenfalls über das Online-Portal (siehe oben). Ausnahmen sind Schülerstudierende, die sich bei Frau Ewald (Zimmer 3.029) persönlich anmelden.

Anmeldeschluss ist der **13.09.2018**.