Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

7. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2018

31. Mai 2018

Abgabe bis 7. Juni 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 25:

(i) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := y^2 - 3x^2y + x^4$.

(a) Zeigen Sie, dass für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $\varphi_v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_v(t) := f(tv)$ ein lokales Minimum in $t = 0$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ jedoch kein lokales Minimum besitzt.

(ii) Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$, sowie $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) := \sum_{k=1}^m \|x - a_k\|^2$. Zeigen Sie, dass g ein lokales Minimum besitzt und stellen Sie ein LGS zu dessen Berechnung auf.

Aufgabe 26 (K):

(i) Die Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$u(x,y) := (x^2 + xy + 1,\, x + y + y^3 + 1) \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung des Punktes $(1,1)$ gibt, die durch u bijektiv auf eine offene Umgebung des Punktes $(3,4)$ abgebildet wird. Berechnen Sie außerdem die Ableitung der Umkehrfunktion von u im Punkt $(3,4)$.

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := x\cos(z) + y\sin(z) + (x+y+z)^{42} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \quad \text{für } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(\frac{\pi}{4}, 0)$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}$ existieren mit $g(\frac{\pi}{4}, 0) = -\frac{\pi}{4}$ und $f(x,y,g(x,y)) = 0$ für alle $(x,y) \in U$.

(b) Berechnen Sie $g'(\frac{\pi}{4}, 0)$.

(iii) Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}$ von $x_0 = \frac{\pi}{4}$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $\tilde{g}\colon \tilde{U} \to \mathbb{R}^2$ existieren, sodass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x\cos(z) + y\sin(z) + (x+y+z)^{42} &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

durch (x,y,z) mit $(y,z) = \tilde{g}(x)$ $(x \in \tilde{U})$ gelöst wird. Berechnen Sie außerdem $\tilde{g}'(x_0)$.

Aufgabe 27:

(i) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} 2\sin(y) + \arctan(x)\sin(y) \\ -\mathrm{e}^x \cos(y) \end{pmatrix} \qquad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung $\tilde{U}$ gibt derart, dass $f|_{\tilde{U}}\colon \tilde{U} \to \mathbb{R}^2$ injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass f selbst nicht injektiv ist.

(ii) Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(2,5)$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}^2$ gibt, sodass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + uy + \mathrm{e}^v &= 0, \\ 2x + u^2 - uv &= 5 \end{aligned}$$

durch (x,y,u,v) mit $(u,v) = g(x,y)$ $((x,y) \in U)$ gelöst wird. Berechnen Sie außerdem $g'(2,5)$.

Aufgabe 28 (K):

(i) Bestimmen Sie $\max\{xyz\colon x,y,z > 0,\ x+y+z = 1\}$.

(ii) Es seien

$$A := \left\{x \in \mathbb{R}^2\colon x_1^2 + 2x_2^2 = 6\right\} \qquad \text{und} \qquad B := \left\{y \in [0,\infty)^2\colon y_1 + y_2 = 5\right\}.$$

Berechnen Sie den Wert von

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{\|x-y\| : x \in A,\ y \in B\}.$$

Hinweis: Sie können Aufgabe 9 (i) verwenden.

Anmeldung zum Übungsschein Analysis II

Die Anmeldung zum Übungsschein ist ab sofort möglich. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **20.07.2018**.

Anmeldung zur Klausur Analysis II

Die Klausur Analysis II findet statt am **27.09.2018** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Sobald die Übungsscheine verbucht sind, können Sie sich zur Klausur Analysis II anmelden. Die Anmeldung erfolgt ebenfalls über das Online-Portal (siehe oben). Ausnahmen sind Schülerstudierende, die sich bei Frau Ewald (Zimmer 3.029) persönlich anmelden.

Anmeldeschluss ist der **13.09.2018**.