Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

8. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2018

7. Juni 2018

Abgabe bis 14. Juni 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 29:

(i) Es seien $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) := x^2 + y^2 - 1$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := xy^2$. Zeigen Sie, dass f auf der Menge

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \varphi(x,y) = 0\}$$

Minimum und Maximum annimmt und bestimmen Sie diese, sowie die zugehörigen Extremalstellen.

(ii) Es sei $M = E \cap K \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y + 2z = 3\} \quad \text{und} \quad K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x^2 + y^2 = z^2\}.$$

Zeigen Sie, dass es Punkte $\xi_0, \zeta_0 \in M$ gibt mit

$$\|\xi_0\| = \min_{\xi \in M} \|\xi\| \quad \text{und} \quad \|\zeta_0\| = \max_{\zeta \in M} \|\zeta\|$$

und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 30 (K):

(i) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $n \in \mathbb{N}$, sowie $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Beweisen Sie: γ ist genau dann rektifizierbar, wenn sein inverser Weg γ^- rektifizierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass in diesem Fall $L(\gamma) = L(\gamma^-)$ gilt.

(ii) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei der rektifizierbare Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ gegeben mit der Parameterdarstellung

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) \quad \text{für } t \in [0,1].$$

Ferner sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass der Weg $\hat{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\hat{\gamma}(t) := \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(t) b_k \quad \text{für } t \in [0,1]$$

ebenfalls rektifizierbar ist und $L(\gamma) = L(\hat{\gamma})$ gilt.

Aufgabe 31 (K):

(i) Berechnen Sie die Weglängenfunktion der folgenden Wege:

(a) $\gamma_1\colon [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_1(t) := (\cos(t), \sin(t), \cosh(t))$,

(b) $\gamma_2\colon [0, 10] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) := (\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3})$,

(c) $\gamma_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_3(t) := (2\cos(2\pi t) - \cos(4\pi t), 2\sin(2\pi t) - \sin(4\pi t))$.

(ii) Gegeben sei der Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} (t, \sqrt{t}\cos(\frac{\pi}{t})), & t \in (0,1], \\ (0,0), & t = 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Weg γ und zeigen Sie, dass er nicht rektifizierbar ist.

Aufgabe 32:

(i) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sowie $h \in \mathrm{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$. Ferner gebe es $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ so, dass $h|_{[t_{k-1},t_k]} \in \mathrm{C}^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}^n)$ für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$. Zeigen Sie, dass

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^{n+1},\ \gamma(t) := (t, h(t))$$

rektifizierbar ist und bestimmen Sie die zugehörige Weglängenfunktion.

Hinweis: $h|_{[t_{k-1},t_k]} \in \mathrm{C}^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}^n)$ bedeutet, dass für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die Komponentenfunktion h_j stetig differenenziebar ist auf $[t_{k-1}, t_k]$. Insbesondere existieren linksseitige und rechtsseitige Ableitung von h_j in den Punkten t_k, müssen aber nicht gleich sein.

(ii) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, sowie $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $M \geq 0$.

Zeigen Sie: Ist der Weg γ rektifizierbar, so ist auch der Weg $\hat{\gamma} := \varphi \circ \gamma$ rektifizierbar, und es gilt

$$L(\hat{\gamma}) \leq M\, L(\gamma).$$

Anmeldung zum Übungsschein Analysis II

Die Anmeldung zum Übungsschein ist ab sofort freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **20.07.2018**.

Anmeldung zur Klausur Analysis II

Die Klausur Analysis II findet statt am **27.09.2018** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Sobald die Übungsscheine verbucht sind, können Sie sich zur Klausur Analysis II anmelden. Die Anmeldung erfolgt ebenfalls über das Online-Portal (siehe oben). Ausnahmen sind Schülerstudierende, die sich bei Frau Ewald (Zimmer 3.029) persönlich anmelden.

Anmeldeschluss ist der **13.09.2018**.