Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

9. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2018

14. Juni 2018

Abgabe bis 21. Juni 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 33 (K):

(i) Es sei $r > 0$ und $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (r\cos(t), r\sin(t))$.

(a) Zeigen Sie, dass γ glatt ist und bestimmen Sie die Parameterdarstellung $\tilde{\gamma}$ des Bogens Γ_γ mit der Weglänge als Parameter.

(b) Weiter sei $f\colon [-r,r]^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := (\arccos(\frac{x}{r}) + \frac{y}{r}, x+y)$. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(x,y) \cdot d(x,y).$$

(ii) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen f und Wege γ jeweils das Wegintegral $\int_\gamma f(x) \cdot dx$:

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1,x_2,x_3) := (x_2, x_3, \mathrm{e}^{-x_1})$, $\quad \gamma\colon [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$,
$\gamma(t) := (-\cos(t), \sin(t), \cos(t))$,

(b) $f\colon \mathbb{R}\times(0,\infty) \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1,x_2) := (\log(x_2), x_1)$, $\quad \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := (t, \mathrm{e}^t)$,

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1,x_2) := (x_1, \frac{1}{1+x_2^2})$, $\quad \gamma\colon [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := (\sinh(t), \cos(t))$.

Aufgabe 34 (K):

(i) Zeigen Sie, dass der Weg $\gamma_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\gamma_1(t) := \mathrm{e}^t$ glatt ist. Zeigen Sie weiter, dass der Weg

$$\gamma_2\colon [0,2] \to \mathbb{R},\ \gamma_2(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}, & t \in [0,1) \\ \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}, & t \in [1,2] \end{cases}$$

nicht glatt ist, aber den gleichen Bogen parametrisiert wie γ_1.

(ii) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $\gamma\colon [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$ ein zweimal stetig differenzierbarer Weg mit der Weglänge als Parameter, so nennt man $\kappa(s) := \|\gamma''(s)\|$ für $s \in [0, L(\gamma)]$ die *Krümmung* von γ an der Stelle s.

(a) Es sei $r > 0$. Bestimmen Sie die Krümmung von

$$\gamma\colon [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := \big(r\cos(\tfrac{t}{r}), r\sin(\tfrac{t}{r})\big)$$

und berechnen Sie $\int_0^{L(\gamma)} \kappa(s)\, ds$.

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sowie $f \in \mathrm{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ und $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (t, f(t))$. Bestimmen Sie die Parameterdarstellung $\tilde{\gamma}$ des Bogens Γ_γ mit der Weglänge als Parameter. Berechnen Sie außerdem die Krümmung von $\tilde{\gamma}$ in jedem Punkt $t \in [0, L(\tilde{\gamma})]$.

Aufgabe 35:
Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\gamma \in \mathrm{C}^2([a,b],\mathbb{R}^n)$ ein glatter Weg. Ferner sei $l := L(\gamma)$ und $s\colon [a,b] \to [0,l]$ die Weglängenfunktion von γ, sowie $\hat{\gamma}\colon [0,l] \to \mathbb{R}^n$ die Parameterdarstellung nach der Weglänge.

(i) Zeigen Sie, dass auch $\hat{\gamma}$ zweimal stetig differenzierbar ist und dass die zweite Ableitung gegeben ist durch
$$\hat{\gamma}''(s(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^2}\gamma''(t) - \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^4}\big(\gamma'(t)\cdot\gamma''(t)\big)\,\gamma'(t) \quad \text{für alle } t \in [a,b].$$

(ii) Zeigen Sie, dass für jedes $\tau \in (0,l)$ die Vektoren $\hat{\gamma}'(\tau)$ und $\hat{\gamma}''(\tau)$ orthogonal sind.

Aufgabe 36:

(i) Zeigen Sie für die folgenden Wege γ jeweils dass sie glatt sind und bestimmen Sie die Parameterdarstellung mit der Weglänge als Parameter.

(a) $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) := (\cos(t),\sin(t),t)$, (b) $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := \mathrm{e}^{t/10}(\cos(t),\sin(t))$.

(ii) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen f und Wege γ jeweils das Wegintegral $\int_\gamma f(x)\cdot dx$:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1,x_2) := (\mathrm{e}^{x_1}, x_1x_2)$, $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := (\cos(t),\sin(t))$,

(b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1,x_2,x_3) := (x_2,-x_3,x_1)$, $\gamma\colon [0,\log(2)] \to \mathbb{R}^3$,
$\gamma(t) := (\sinh(t),\cosh(t),\sinh(t))$,

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1,x_2) := (x_1^2x_2,-x_2)$, $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := (t^2,t^3-1)$,

Anmeldung zum Übungsschein Analysis II

Die Anmeldung zum Übungsschein ist ab sofort freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **20.07.2018**.

Anmeldung zur Klausur Analysis II

Die Klausur Analysis II findet statt am **27.09.2018** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Sobald die Übungsscheine verbucht sind, können Sie sich zur Klausur Analysis II anmelden. Die Anmeldung erfolgt ebenfalls über das Online-Portal (siehe oben). Ausnahmen sind Schülerstudierende, die sich bei Frau Ewald (Zimmer 3.029) persönlich anmelden.

Anmeldeschluss ist der **13.09.2018**.