Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

10. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2018

21. Juni 2018

Abgabe bis 28. Juni 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 37:
Überprüfen Sie jeweils, ob $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ auf D eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $D := \mathbb{R}^2$ und $f(x,y) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^y + \cos(x)\cos(y) \\ x\mathrm{e}^y - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$.

(ii) $D := \mathbb{R}^3$ und $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xyz^3 \\ 2y + x^2z^3 \\ y^2 + 3x^2yz^2 \end{pmatrix}$.

(iii) $D := \mathbb{R}^3$ und $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xz \\ z^2 + 2xy \\ x^2 + 2yz \end{pmatrix}$.

(iv) $D := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z > 0 \text{ und } \|(x,y,z)\| > 5\big\}$ und $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2y \\ z\mathrm{e}^x \\ xy\log(z) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 38 (K):

(i) Es sei $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \left(\frac{y}{x^2+y^2} + y\,g(xy),\ \frac{-x}{x^2+y^2} + x\,g(xy)\right).$$

Prüfen Sie, ob f in den folgenden Gebieten eine Stammfunktion besitzt, und geben Sie diese gegebenenfalls an:

(a) $D_1 := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 2y\big\}$,

(b) $D_2 := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 2x\big\}$,

(c) $D_3 := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(ii) Es seien $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x) := g(\|x\|)x$ ($x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$).

(a) Zeigen Sie, dass f eine Stammfunktion besitzt.

(b) Es sei $m \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie die Stammfunktion von f für $g(t) := t^m$ ($t \in (0,\infty)$).

Aufgabe 39:
Es seien $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sowie $f \in \mathrm{C}([a,b] \times D, \mathbb{R})$. Weiter sei $F\colon D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_a^b f(t,x)\,dt.$$

Außerdem sei $j \in \{1,\ldots,n\}$ und es existiere die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ und sei stetig, es gelte also $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathrm{C}([a,b] \times D, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass F nach der Variable x_j differenzierbar ist mit Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x)\,dt \quad \text{für alle } x \in D.$$

Aufgabe 40 (K):

(i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen jeweils auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(1-\mathrm{i})^n}$,

(b) $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{2n+\mathrm{i}}{n+2\mathrm{i}n}\right)^n$,

(c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n+\mathrm{i}}{(n+\mathrm{i}+1)^3}$,

(d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}-\mathrm{i}n}$.

Berechnen Sie in (a) zusätzlich den Reihenwert.

(ii) Berechnen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(2n+1)(1+\mathrm{i})^n}{(n-1)^2}(z-1)^n$,

(b) $\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n 3^{(-1)^n n} z^{3n}$.

Anmeldung zum Übungsschein Analysis II

Die Anmeldung zum Übungsschein ist ab sofort freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **20.07.2018**.

Anmeldung zur Klausur Analysis II

Die Klausur Analysis II findet statt am **27.09.2018** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Sobald die Übungsscheine verbucht sind, können Sie sich zur Klausur Analysis II anmelden. Die Anmeldung erfolgt ebenfalls über das Online-Portal (siehe oben). Ausnahmen sind Schülerstudierende, die sich bei Frau Ewald (Zimmer 3.029) persönlich anmelden.

Anmeldeschluss ist der **13.09.2018**.