Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

11. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2018

28. Juni 2018

Abgabe bis 5. Juli 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 41:
ℓ^1 bezeichne die Menge der Folgen in $\mathbb{C}$, deren zugehörige Reihe absolut konvergiert, d.h.

$$\ell^1 := \left\{ (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathbb{C}\colon \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \text{ konvergiert} \right\}.$$

Weiter sei $\|\cdot\|_1 : \ell^1 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \,.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf ℓ^1 ist und, dass $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 42 (K):

(i) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $K \neq \emptyset$ und $X := \mathrm{C}(K, \mathbb{R}^m)$. Weiter sei $\|\cdot\|_\infty : X \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\|f\|_\infty := \max\{\|f(x)\| : x \in K\} \qquad \text{für alle } f \in X.$$

  (a) Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum ist.
  (b) Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.
  (c) Ist $(\mathrm{C}^1(K, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum?

(ii) Zeigen Sie, dass es genau ein $f_* \in \mathrm{C}([0, 1], \mathbb{R})$ gibt mit

$$f_*(x) = x + \int_0^x t\, f_*(t)\, dt \qquad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

Aufgabe 43 (K):
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $f\colon X \to X$ eine Kontraktion, d.h. es gebe ein $L \in [0, 1)$ mit

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\,\|x - y\| \qquad \text{für alle } x, y \in X.$$

Weiter sei $F\colon X \to X$ definiert durch $F(x) := x + f(x)$.

(i) Zeigen Sie, dass F bijektiv ist.
Hinweis: Betrachten Sie für festes $z \in X$ die Abbildung $g_z\colon X \to X$, $g_z(x) := z - f(x)$.

(ii) Zeigen Sie, dass F und F^{-1} Lipschitz-stetig sind, d.h. das Konstanten $m, M > 0$ existieren mit

$$\|F(x) - F(y)\| \leq m\,\|x - y\| \quad \text{und} \quad \left\|F^{-1}(x) - F^{-1}(y)\right\| \leq M\,\|x - y\| \qquad \text{für alle } x, y \in X.$$

Aufgabe 44:

(i) Geben Sie je ein Beispiel an für eine Menge $M \subseteq [0,1]$ und eine Funktion $F\colon M \to M$ mit $|F(x) - F(y)| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in M$, die ...

(a) ... keinen Fixpunkt besitzt, wobei M kompakt ist.

(b) ... unendlich viele Fixpunkte hat, wobei M ein kompaktes Intervall ist.

(c) ... genau einen Fixpunkt $x_* \in M$ besitzt, für welche aber die durch $x_{k+1} = F(x_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ gegebene rekursive Folge nur konvergiert, wenn $x_0 = x_*$.

(ii) Es sei $g \in \mathrm{C}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$. Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass es genau ein $f_* \in \mathrm{C}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ gibt mit

$$f_*(x) - x \int_0^{\frac{1}{2}} f_*(t)\, dt = g(x) \qquad \text{für alle } x \in [0, \tfrac{1}{2}].$$

Berechnen Sie außerdem f_*.

Hinweis: Definieren Sie eine Abbildung $F\colon \mathrm{C}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R}) \to \mathrm{C}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ für die $F(f_*) = f_*$ gilt genau dann, wenn f_* obige Gleichung erfüllt.

Anmeldung zum Übungsschein Analysis II

Die Anmeldung zum Übungsschein ist ab sofort freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **20.07.2018**.

Anmeldung zur Klausur Analysis II

Die Klausur Analysis II findet statt am **27.09.2018** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Sobald die Übungsscheine verbucht sind, können Sie sich zur Klausur Analysis II anmelden. Die Anmeldung erfolgt ebenfalls über das Online-Portal (siehe oben). Ausnahmen sind Schülerstudierende, die sich bei Frau Ewald (Zimmer 3.029) persönlich anmelden.

Anmeldeschluss ist der **13.09.2018**.