Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

12. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2018

5. Juli 2018

Abgabe bis 12. Juli 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 45:

(i) Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen:

(a) $y' = 3y + \mathrm{e}^x \sin(x)$, (b) $y' = -2xy + x\mathrm{e}^{-x^2}$.

(ii) Berechnen Sie jeweils die Lösung mit maximalem Definitionsbereich der folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y' = -\frac{x^2}{y^3}$, $y(0) = 1$, (b) $y' = \frac{1+y^2}{(1+x^2)y}$, $y(1) = 4$.

Aufgabe 46 (K):
Berechnen Sie jeweils die Lösung mit maximalem Definitionsbereich der folgenden Anfangswertprobleme:

(i) $y' + y\cos(x) = \sin(x)\cos(x)$, $y(0) = 1$, (ii) $y' = \mathrm{e}^{2x}\sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}$, $y(0) = 2$,

(iii) $x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3$, $(x > 0)$, $y(1) = 1$, (iv) $y' = \exp\big(x - y - \mathrm{e}^y\big)$, $y(1) = 0$.

Aufgabe 47 (K):

(i) Es sei $f\colon [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und für jedes $x \in [a,b]$ sei $f(x,\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x,y)$ monoton fallend. Zeigen Sie: Sind $y_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $y_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = f(x,y), \quad y(a) = y_0,$$

dann gilt $y_1 = y_2$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g := \frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2$.

(ii) Es sei $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \cos(y^2) - 2y, \quad y(0) = 0.$$

(a) Es sei $z\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $z(x) := \mathrm{e}^{2x} y(x)$. Bestimmen Sie eine stetige Funktion $f\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $z' = f(x,z)$ für $x \ge 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a): $|y(x)| \le \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2x})$ für alle $x \ge 0$.

Aufgabe 48:
Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $y\colon J \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$.

(i) Sei $f \in \mathrm{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $y \in \mathrm{C}^{n+1}(J,\mathbb{R})$.

(ii) Für ein $t_0 \in J$ gelte $y(t_0) > 0$ und f erfülle $f(0) > 0$. Zeigen Sie, dass $y(t) > 0$ für alle $t \in J$ mit $t \ge t_0$.

(iii) Zeigen Sie, dass y monoton ist.

Anmeldung zum Übungsschein Analysis II

Die Anmeldung zum Übungsschein ist ab sofort freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **20.07.2018**.

Anmeldung zur Klausur Analysis II

Die Klausur Analysis II findet statt am **27.09.2018** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Sobald die Übungsscheine verbucht sind, können Sie sich zur Klausur Analysis II anmelden. Die Anmeldung erfolgt ebenfalls über das Online-Portal (siehe oben). Ausnahmen sind Schülerstudierende, die sich bei Frau Ewald (Zimmer 3.029) persönlich anmelden.

Anmeldeschluss ist der **13.09.2018**.