Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

1. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis III im Wintersemester 2018/19

22. Oktober 2018

Abgabe bis 29. Oktober 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 1:

(i) Bestimmen Sie die von einer reellen Zahl x erzeugte σ-Algebra $\sigma(\{x\})$ auf $\mathbb{R}$.

(ii) Geben Sie ein Beispiel für eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ an, die die Eigenschaften (σ_1) und (σ_2), aber nicht (σ_3) aus der Definition einer σ-Algebra erfüllt.

(iii) Finden Sie eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B})$.

(iv) Ist $\left\{\emptyset, [0,1], [0,\frac{1}{3}], (\frac{1}{3},1], (\frac{1}{3},\frac{2}{3}), [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]\right\}$ eine σ-Algebra auf $[0,1]$?

Aufgabe 2 (K):
Es seien X, Y nichtleere Mengen, sowie $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Weiter seien $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra auf X und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine σ-Algebra auf Y.

(i) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $f^{-1}(\mathcal{B}) := \left\{f^{-1}(B)\colon B \in \mathcal{B}\right\}$ ist eine σ-Algebra auf X.

(b) $f_*(\mathcal{A}) := \left\{B \subseteq Y\colon f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$ ist eine σ-Algebra auf Y.

(ii) Zeigen Sie, dass $\{A \subseteq X\colon A$ oder A^c ist abzählbar$\}$ eine σ-Algebra auf X ist.

Aufgabe 3:

(i) Es sei X eine nichtleere Menge. Das Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ habe die Eigenschaften (σ_1) und (σ_2) aus der Definition einer σ-Algebra auf X, sowie die Eigenschaft

$(\sigma_3$') Für jede disjunkte Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ gilt $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ genau dann eine σ-Algebra auf X ist, wenn für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $A \cap B \in \mathcal{A}$.

(ii) Es seien X eine nichtleere Menge, $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf X und $Y \subseteq X$. Zeigen Sie:

$$\sigma(\mathcal{B} \cup \{Y\}) = \{(A \cap Y) \cup (B \cap Y^c)\colon A, B \in \mathcal{B}\}.$$

Aufgabe 4 (K):

(i) Seien X eine nichtleere Menge und $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge in $\mathcal{P}(X)$ mit $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j = X$. Bestimmen Sie $\sigma(\{X_j\colon j \in \mathbb{N}\})$.

(ii) Seien $d \in \mathbb{N}$ sowie $\mathcal{E}_1 = \{[a,b]\colon a, b \in \mathbb{Q}^d, a \le b\}$ und $\mathcal{E}_2 = \{A \subseteq \mathbb{R}^d\colon A$ kompakt$\}$. Zeigen Sie, dass für die Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{B}_d$ auf $\mathbb{R}^d$ gilt:

$$\mathfrak{B}_d = \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2).$$

Information

Alle Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb, Scheinkriterien, Tutorien, Prüfung, Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf unserer Webseite

`http://www.math.kit.edu/iana2/lehre/ana32018w/de`