Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

2. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis III im Wintersemester 2018/19

29. Oktober 2018

Abgabe bis 5. November 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 5:
Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$. Wir definieren die Mengen

$$\liminf_{j\to\infty} A_j := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j, \quad \limsup_{j\to\infty} A_j := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\liminf_{j\to\infty} A_j$ und $\limsup_{j\to\infty} A_j$ sind Elemente von $\mathcal{A}$.

(ii) Es ist $\mu(\liminf_{j\to\infty} A_j) \le \liminf_{j\to\infty} \mu(A_j)$.

(iii) Falls $\mu\Big(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j\Big) < \infty$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, so ist $\mu(\limsup_{j\to\infty} A_j) \ge \limsup_{j\to\infty} \mu(A_j)$.

(iv) Kann man in (iii) auf die Zusatzbedingung $\mu\Big(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j\Big) < \infty$ verzichten?

Aufgabe 6 (K):

(i) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(ii) Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Außerdem sei $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ eine Abbildung mit

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(M2') Für $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt gilt $\mu\big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\big) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$.

(M3) Für jede Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_{j+1} \subseteq A_j$ für $j \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum ist.

Aufgabe 7:

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $I_k = [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a_k \le b_k$ und es gelte $I_{k+1} \subseteq I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, sowie $(b_k - a_k) \to 0$ für $k \to \infty$. Zeigen Sie, dass es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ gibt.

(ii) Setze $X := [0, 1]$ und $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$. Beweisen Sie, dass es kein Maß $\mu\colon \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ gibt mit $\mu(X) = 1$ und $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in X$.

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Intervallschachtelung in $[0, 1]$ und verwenden Sie Teil (i).

Aufgabe 8 (K):

(i) Seien X, Y nichtleere Mengen, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra auf X und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine σ-Algebra auf Y. Weiter seien $f\colon X \to Y$ eine Abbildung mit $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ und $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ein Maß. Zeigen Sie, dass $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ ein Maßraum ist, wobei

$$\nu\colon \mathcal{B} \to [0, +\infty],\ B \mapsto \mu(f^{-1}(B))$$

definiert ist. ν heißt auch Bildmaß.

(ii) Es sei μ ein beliebiges Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass es genau eine Folge $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $[0, \infty]$ mit $\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \delta_j(A)$ für $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gibt. Hierbei bezeichne δ_j das Diracmaß bezüglich der Zahl $j \in \mathbb{N}$, d.h. es gilt

$$\delta_j : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty],\ \delta_j(A) = \begin{cases} 1, & j \in A, \\ 0, & j \notin A. \end{cases}$$