Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

3. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis III im Wintersemester 2018/19

5. November 2018

Abgabe bis 12. November 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 9 (K):
Es seien $d \in \mathbb{N}$ und die Menge aller Teilmengen von λ_d-Nullmengen

$$\mathcal{N}_d := \{N \subseteq \mathbb{R}^d \colon \text{es existiert ein } M \in \mathfrak{B}_d \text{ mit } N \subseteq M \text{ und } \lambda_d(M) = 0\},$$

sowie die Lebesguesche σ-Algebra

$$\mathfrak{L}_d := \{B \cup N \colon B \in \mathfrak{B}_d,\ N \in \mathcal{N}_d\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{L}_d$ eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$ ist.

(ii) Sei $\mu_d \colon \mathfrak{L}_d \to [0, +\infty]$ definiert durch $\mu_d(L) := \lambda_d(B)$ für $L = B \cup N \in \mathfrak{L}_d$ mit $B \in \mathfrak{B}_d$ und $N \in \mathcal{N}_d$. Zeigen Sie, dass μ_d wohldefiniert und ein Maß auf $\mathfrak{L}_d$ ist.

(iii) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{N}_\mu = \{N \in \mathcal{A} \colon \mu(N) = 0\}$ bezeichne die Menge aller μ-Nullmengen. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, wenn für Mengen $N \in \mathcal{N}_\mu$ und $M \subseteq N$ stets $M \in \mathcal{A}$ folgt. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{L}_d, \mu_d)$ vollständig ist.

Aufgabe 10 (K):

(i) Es seien $d, m, k \in \mathbb{N}$ sowie $f \colon \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^m$, $g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ und $h \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ Borel-messbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $\phi(x) := f(x, g(x) \cdot h(x))$ Borel-messbar ist.

(ii) Es seien $d \in \mathbb{N}$, $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Borel-messbar und

$$\operatorname{sign} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \operatorname{sign}(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\operatorname{sign} \circ f$ Borel-messbar ist.

(iii) Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie, dass f Borel-messbar ist.

Aufgabe 11:

(i) Es seien $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $B \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ mit $B \in \mathfrak{B}_{d-1}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie

$$\lambda_d(B \times (a, b]) = (b - a)\lambda_{d-1}(B).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mu \colon \mathfrak{B}_{d-1} \to [0, +\infty],\ B \mapsto \frac{1}{b-a}\lambda_d(B \times (a, b])$ ein Maß ist.

(ii) Es seien $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $M \in \mathcal{N}_1$. Zeigen Sie $f(M) \in \mathcal{N}_1$.

(iii) Es seien $d, m, k \in \mathbb{N}$ und $f \colon \mathbb{R}^{d+m} \to \mathbb{R}^k$ und $g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ Borel-messbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ definiert durch $\phi(x) := f(x, g(x))$ Borel-messbar ist.

Aufgabe 12:
Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{L}_d$, bzw. μ_d bezeichne die Lebesguesche σ-Algebra, bzw. das Maß aus Aufgabe 9.

(i) Zeigen Sie die folgende Charakterisierung Lebesgue-messbarer Mengen:
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ist genau dann in $\mathfrak{L}_d$ enthalten, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $A \subseteq M \subseteq O$ und $\lambda_d(O \setminus A) < \varepsilon$ existieren.

Hinweis: Zeigen Sie für die eine Richtung der Charakterisierung zunächst die Existenz einer offenen Menge O mit $\mu_d(O \setminus M) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dazu können Sie die Fälle $\mu_d(M) < \infty$ und $\mu_d(M) = \infty$ unterscheiden. Verwenden Sie für den ersten Fall die Definition von $\mathfrak{L}_d$ und Satz 2.10. Führen Sie anschließend den zweiten Fall auf den ersten zurück. Folgern Sie schließlich die Existenz der abgeschlossenen Menge A aus der Existenz der offenen Menge O.

(ii) Folgern Sie aus Teil (i) die folgende Darstellung des erweiterten Lebesguemaßes μ_d aus Aufgabe 9:
Für jede Menge $M \in \mathfrak{L}_d$ gilt

$$\begin{aligned}\mu_d(M) &= \sup\{\mu_d(A) \colon A \subseteq \mathbb{R}^d \text{ ist abgeschlossen mit } A \subseteq M\}\\ &= \inf\{\mu_d(O) \colon O \subseteq \mathbb{R}^d \text{ ist offen mit } M \subseteq O\}.\end{aligned}$$