Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

4. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis III im Wintersemester 2018/19

12. November 2018

Abgabe bis 19. November 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 13:
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $U_f := \{x \in \mathbb{R}\colon f \text{ ist unstetig in } x\}$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $U_f \in \mathfrak{B}_1$.

Hinweis: Betrachten Sie für $n, k \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$A_{n,k} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists\, y \in U_{\frac{1}{k}}(x) : \ |f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{n} \right\},$$
$$A'_{n,k} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists\, y_1, y_2 \in U_{\frac{1}{k}}(x) : \ |f(y_1) - f(y_2)| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Zeigen Sie die Identität $U_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A'_{n,k}$ und beweisen Sie, dass jede Menge $A'_{n,k}$ offen ist.

(ii) Wenn U_f abzählbar ist, dann ist f $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_1$-messbar.

Aufgabe 14 (K):

(i) Es sei

$$f\colon \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}},\ x \mapsto \begin{cases} \tan(x) & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}, \\ 0 & \text{falls } x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}, \\ \pm\infty & \text{falls } x = \pm\infty. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Graphen von f. Ist f $\overline{\mathfrak{B}}_1 - \overline{\mathfrak{B}}_1$-messbar?

(ii) Es sei

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{falls } 0 \neq x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Ist g messbar?

Hinweis Sie können Aufgabe 13 (ii) verwenden.

Aufgabe 15:

(i) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter sei die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t,x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ stetig und die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(t,x)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ messbar. Zeigen Sie, dass f dann $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1$ messbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $t, x \in \mathbb{R}$ die Funktionen:

$$f_n(t,x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(t) f\left(\frac{k}{2^n}, x\right).$$

(ii) Bleibt die Aussage gültig, wenn nur vorausgesetzt wird, dass die Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t,x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(t,x)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ messbar sind?

Aufgabe 16 (K):

(i) Approximieren Sie die Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto x^3$ durch eine Folge einfacher Funktionen.

(ii) Finden Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, welche nicht Grenzwert einfacher Funktionen ist.

(iii) Seien $d \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}^d$ und $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$. Beweisen Sie, dass die Funktion $\tau_y f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}},\ x \mapsto f(x-y)$ genau dann messbar ist, wenn f messbar ist.

(iv) Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $\overline{U_1}(0) \subseteq \mathbb{R}^d$ die abgeschlossene Kugel um $0 \in \mathbb{R}^d$ mit Radius 1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \overline{U_1}(0) \to \overline{\mathbb{R}},\ f(x) := \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ (-1)^n \|x\|^{2n+1}, & x \in \{y \in \mathbb{R}^d \colon \frac{1}{n+1} < \|y\| \leq \frac{1}{n}\} \text{ für } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

messbar ist.