Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

5. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis III im Wintersemester 2018/19

19. November 2018

Abgabe bis 26. November 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 17:
Zeigen Sie die Messbarkeit der folgenden Funktionen $f\colon X \to [0,+\infty]$ und berechnen Sie $\int_X f(x)\,dx$.

(i) $X = [0,1]$, $f(x) := [e^x]$ für $x \in X$. Hierbei ist $[y] := \max\{k \in \mathbb{Z}\colon k \leq y\}$ für $y \in \mathbb{R}$.

(ii) $X = (0,1]$, $f(x) := \frac{\sin x}{x^3}$ für $x \in X$.

(iii) $X = \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^4 e^{\sqrt{|x|}}, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

(iv) $X = \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^4 e^{\sqrt{|x|}}, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

Aufgabe 18 (K):

(i) Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $X \in \mathfrak{B}_d$. Gegeben seien messbare Funktionen $f_n\colon X \to [0,+\infty]$, die eine monoton fallende Folge bilden. Weiter existiere der Grenzwert $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$ und es sei $\int_X f_1(x)\,dx < \infty$. Zeigen Sie die Identität

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx = \int_X f(x)\,dx.$$

Kann auf die Voraussetzung $\int_X f_1(x)\,dx < \infty$ verzichtet werden?

(ii) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{|\cos(x)|}\,dx$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \int_{[-1,\infty)} e^{-nx^2}\,dx$.

(iii) Es sei $a_k := \int_{[0,1]} \frac{x}{(x+1)^k}\,dx$ für $k \in \mathbb{N}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 19:

(i) Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$ und $f\colon X \to [0,+\infty]$ messbar. Zeigen Sie, dass durch

$$\mu\colon \mathfrak{B}(X) \to [0,+\infty],\ A \mapsto \int_A f(x)\,dx$$

ein Maß auf $\mathfrak{B}(X)$ definiert wird.

(ii) Es seien $d \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}^d$, $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\tau_y f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\tau_y f(x) := f(x-y)$ die Translation aus Aufgabe 16. Beweisen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn $\tau_y f$ integrierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass dann

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \tau_y f(x)\,dx$$

gilt.

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zuerst für einfache Funktionen.

Aufgabe 20 (K):

(i) Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \neq \emptyset$ und $f\colon X \to [0,+\infty]$ messbar. Zeigen Sie die Tschebyscheffsche Ungleichung:

$$\lambda_d(f^{-1}([\alpha,+\infty])) \leq \frac{1}{\alpha}\int_X f(x)\,dx \qquad \text{für alle } \alpha > 0.$$

(ii) Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \neq \emptyset$ und $f_n, f\colon X \to [0,+\infty)$ messbar, sowie $f_n \leq f$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gelte $\int_X f(x)\,dx < \infty$. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,dx \leq \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\,dx.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $g_n := f - \sup_{k\geq n} f_k$ $(n \in \mathbb{N})$.

(iii) Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \frac{g(x)^2 - g(x)}{\exp(g(x)^2)+1}$ integrierbar ist.

Anmeldung zur Klausur Analysis III

Die Klausur Analysis III findet statt am **27.03.2019** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **10.03.2019**.