Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

6. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis III im Wintersemester 2018/19

26. November 2018

Abgabe bis 3. Dezember 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 21 (K):
Sind die folgenden Funkionen jeweils messbar, Lebesgue- oder Riemann-integrierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die Lebesgue- bzw. Riemannintegrale.

(i) $X = (0, 1]$, $f_\alpha \colon X \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) $X = [1, \infty)$, $f_\alpha \colon X \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) $X = (0, 1]$, $f \colon X \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-\frac{1}{3}} \mathbb{1}_{(0,1]\cap\mathbb{Q}}(x) + x^{-\frac{4}{3}} \mathbb{1}_{(0,1]\setminus\mathbb{Q}}(x)$.

Aufgabe 22:

(i) Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$ nichtleer und $f \colon X \to \mathbb{R}$ messbar. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \lambda_d(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}) < \infty$$
gilt.

(ii) Ist die Funktion $f \colon (0, 1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\cos(1/x)} \tan(x)$ Lebesgue-integrierbar?

(iii) Gegeben sei eine stetige und integrierbare Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gilt dann $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$?

Aufgabe 23:

(i) Bestimmen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\sin(x)}\, dx$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-nx^2}\, dx$.

(ii) Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$ nichtleer und $f, g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass f und g genau dann fast überall übereinstimmen, wenn für jede Menge $A \in \mathfrak{B}(X)$ die Gleichung
$$\int_A f(x)\, dx = \int_A g(x)\, dx$$
gilt.

Aufgabe 24 (K):

(i) Es sei $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ und $D \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ kompakt sowie $f \in \mathrm{C}(D, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass der Graph von f definiert durch
$$G_f := \{(x, f(x)) \colon x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^d$$
eine Borel-Nullmenge ist.

Hinweis: Überdecken Sie G_f durch $Q_k \times I_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ mit geeigneten Mengen $Q_k \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ und Intervallen $I_k \subseteq \mathbb{R}$ und verwenden Sie Aufgabe 11 (i).

(ii) Zeigen Sie, dass $\{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x|^2 = 1\}$ eine Borel-Nullmenge ist.

Anmeldung zur Klausur Analysis III

Die Klausur Analysis III findet statt am **27.03.2019** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **10.03.2019**.