

7. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis III im Wintersemester 2018/19

3. Dezember 2018

Abgabe bis 10. Dezember 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 25 (K):

(i) Existieren die folgenden Grenzwerte? Berechnen Sie diese gegebenenfalls.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{n^2}{2n^2 x^3 - n e^{-x}} dx,$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt[n]{e^{nx} + n(x+1)^2} dx.$$

(ii) Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \neq \emptyset$ und $g \in \mathcal{L}^1(X)$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{[-n, n]^d \cap X} |x| g(x) dx,$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_X \log \left(1 + \frac{g(x)}{n} \right) dx, \text{ wobei } g \text{ hier zusätzlich als nichtnegativ vorausgesetzt wird.}$$

Aufgabe 26:

Es seien $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ und

$$f: (0, 1) \rightarrow [0, +\infty], \quad x \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{\sqrt{|x - q_j|}}.$$

Beweisen Sie, dass f auf $(0, 1)$ integrierbar ist und die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{\sqrt{|x - q_j|}}$ fast überall auf $(0, 1)$ konvergiert.

Aufgabe 27 (K):

Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar.

(i) Weiter sei $y \in \mathbb{R}^d$. Gilt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U_{n+1}(y) \setminus U_n(y)} f(x) dx = 0$? Hier bezeichnet $U_r(y)$ die offene Kugel mit Radius r um y .

(ii) Seien $z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ und τ_y für $y \in \mathbb{R}^d$ die Translation von Aufgabe 16. Gilt dann die Konvergenz $\tau_{nz} f \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ fast überall auf \mathbb{R}^d ?

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Identität $\int_X \tau_y f(x) dx = \int_{-y+X} f(x) dx$ für $y \in \mathbb{R}^d$.

Aufgabe 28:

Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \neq \emptyset$ und $\lambda_d(X) < \infty$, sowie $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Entscheiden Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{1}{n} \log(1 + e^{nf(x)}) dx$$

existiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Anmeldung zur Klausur Analysis III

Die Klausur Analysis III findet statt am **27.03.2019** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

<https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php>

Anmeldeschluss ist der **10.03.2019**.