Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

8. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis III im Wintersemester 2018/19

10. Dezember 2018

Abgabe bis 17. Dezember 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 29 (K):
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(i) Es sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit *kompaktem Träger*, das heißt es existiert ein kompaktes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus I$. Zeigen Sie, dass die *Faltung* von φ und f, die durch die Funktion

$$\varphi * f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y) f(y)\, dy$$

gegeben ist, wohldefiniert ist. Zeigen Sie weiter, dass die Faltung differenzierbar ist, falls φ stetig differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.

(ii) Sei f nun zusätzlich stetig und beschränkt und φ sei stetig differenzierbar mit den Eigenschaften

1. $\varphi(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$,
2. $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = 1$,
3. φ besitze einen kompakten Träger.

Weiter sei die Folge $(\varphi_n)_n$ durch $\varphi_n(x) := n\varphi(nx)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Beweisen Sie, dass die Faltung $\varphi_n * f$ dann punktweise auf $\mathbb{R}$ gegen f konvergiert. Wann ist diese Konvergenz gleichmäßig?

Aufgabe 30:
Bestimmen Sie das Lebesguemaß der folgenden messbaren Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^3$.

(i) $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x, y \in [0, 2],\ r \leq z \leq R\mathrm{e}^{2x+y}\}$ mit $0 < r < R$.

(ii) $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2],\ 0 \leq z \leq 2(x^2 + y^2)\}$.

Aufgabe 31 (K):
Es seien $r > 0$ und $K := \{x \in \mathbb{R}^4 \colon |x| \leq r\}$ die 4-dimensionale Kugel mit Radius r.

(i) Zeigen Sie, dass K messbar ist und berechnen Sie $\lambda_4(K)$.

(ii) Sei $v = (v_1, \ldots, v_5) \in \mathbb{R}^5$ mit $v_5 \geq 0$. Weiter bezeichne

$$Z := \{(x, 0) + tv \colon x \in K,\ t \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^5$$

den „schiefen“ Zylinder mit Basis K und Kante v. Zeigen Sie, dass Z messbar ist und beweisen Sie

$$\lambda_5(Z) = \frac{\pi^2}{2} v_5 r^4.$$

(iii) Seien nun $0 < r < R$, sowie die vom 2-dimensionalen Torus umschlossene Menge

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\}.$$

Zeigen Sie, dass T messbar ist und berechnen Sie $\lambda_3(T)$.

Aufgabe 32:
Zeigen Sie die Messbarkeit der folgenden Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^3$ und berechnen Sie ihr jeweiliges Lebesguemaß.

(i) Es seien $r > 0$ und $K := K_1(r) \cap K_2(r)$ mit

$$K_1(r) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq r^2\} \quad \text{und} \quad K_2(r) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \leq r^2\}.$$

(ii) $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 \leq 4,\ y^2 \leq 3 \text{ und } 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2}\sqrt{3 - y^2}\}$.

Anmeldung zur Klausur Analysis III

Die Klausur Analysis III findet statt am **27.03.2019** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **10.03.2019**.