Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

9. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis III im Wintersemester 2018/19

17. Dezember 2018

Abgabe bis 7. Januar 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 33:

(i) Es sei $A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y \geq 0,\ x + y \leq \pi\right\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A \left(xy^2 - 2\sin(x+y)\right)\, d(x, y).$$

(ii) Sei $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x, z \leq 0,\ x^2 + z^2 \leq y \leq 4\}$. Berechnen Sie $\int_B x\, d(x, y, z)$.

Aufgabe 34 (K):

(i) Beweisen Sie die Regel der partiellen Integration: Seien $a < b$ reelle Zahlen, $I := [a, b]$ und $f, g \in \mathcal{L}^1(I)$. Weiter seien $F, G \colon I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt \quad \text{und} \quad G(x) := \int_a^x g(t)\, dt$$

für $x \in I$ (nach 7.2 sind F, G stetig). Diese Funktion F, bzw. G nennt man *Stammfunktion* von f bzw. g. Beweisen Sie, dass $F \cdot g, f \cdot G \in \mathcal{L}^1(I)$ gilt und die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\int_a^b F(x)g(x)\, dx = F(b)G(b) - \int_a^b f(x)G(x)\, dx.$$

(ii) Es sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < y < x\}$ und

$$f \colon D \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \frac{x}{(1 + x^2)y^2} \sin(\mathrm{e}^{-x/y})\mathrm{e}^{-x/y}.$$

Beweisen Sie, dass f auf D integrierbar ist, und berechnen Sie $\int_D f(x, y)\, d(x, y)$.

Aufgabe 35 (K):

(i) Untersuchen Sie die Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ jeweils auf Integrierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls $\int_D f(x)\, dx$.

(a) $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in [0, 2],\ x^2 + y^2 \leq z^2\}$ und $f(x, y, z) := xz$,

(b) $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y \in (0, 2),\ \frac{y}{x} > 1\}$ und $f(x, y) := \frac{1}{x^2+y^2}$.

(ii) Es sei $f \colon (0, \infty)^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \frac{x-y}{(x+y)^3}$. Berechnen Sie die iterierten Integrale

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y)\, dx\right) dy \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y)\, dy\right) dx.$$

Ist die Funktion f integrierbar auf $(0, \infty)^2$?

Aufgabe 36:

(i) Es seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass es eine Nullmenge $N \in \mathfrak{B}_d$ gibt, sodass die Faltung

$$(f * g)(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy, & x \in \mathbb{R}^d \setminus N, \\ 0, & x \in N \end{cases}$$

wohldefiniert ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ und $\int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|\,dx$ gilt.

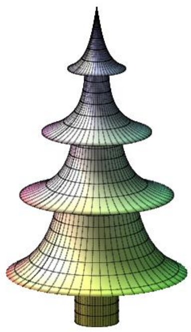
Weihnachtsaufgabe:

Es seien

$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(z) := \begin{cases} \frac{2}{3}, & z \in [0, \frac{3}{2}), \\ \sqrt{\frac{14}{15}}\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2z-1}\right), & z \in [\frac{3}{2}, 4), \\ \sqrt{\frac{99}{101}}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{(z-3)^2}\right), & z \in [4, 6), \\ \sqrt{\frac{36}{37}}\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2(6-z)}\right), & z \in [6, 8), \\ -\frac{1}{4}\tan(\frac{2}{3}(z-10)), & z \in [8, 10), \\ 0, & z \in [10, \infty) \end{cases}$$

und $T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \le f(z)^2\}$. Skizzieren Sie die Menge T und berechnen Sie $\lambda_3(T)$.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!



Anmeldung zur Klausur Analysis III

Die Klausur Analysis III findet statt am **27.03.2019** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **10.03.2019**.