Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

10. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis III im Wintersemester 2018/19

7. Januar 2019

Abgabe bis 14. Januar 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 37:
Es seien $d \in \mathbb{N}$, sowie $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ invertierbar und $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch und positiv definit.

(i) Berechnen Sie die Integrale

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-|Ax|^2\right)\, dx,$ (b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-x^T Bx\right)\, dx.$

(ii) Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids $E := \{x \in \mathbb{R}^d : x^T Bx \le 1\}$.

Aufgabe 38 (K):
Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $U_r(0) \subseteq \mathbb{R}^d$ die offene Kugel um $0 \in \mathbb{R}^d$ mit Radius $r > 0$.

(i) Weiter seien $f\colon U_r(0) \to \mathbb{R}$ integrierbar und $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass dann auch $x \mapsto f(Ax)$ integrierbar ist und beweisen Sie:

$$\int_{U_r(0)} f(x)\, dx = \int_{U_r(0)} f(Ax)\, dx.$$

(ii) Sei nun $d = 3$. Berechnen Sie für alle $j, k \in \{1, 2, 3\}$ das Integral $\int_{U_r(0)} x_j x_k\, dx$.

Hinweis: Eine Möglichkeit zur Lösung dieser Aufgabe ist die folgende: Betrachten Sie im Fall $j \ne k$ die Rotationsmatrix mit den Einträgen

$$a_{l,m} := \begin{cases} 1, & \text{falls } m = l \ne j, \\ -1, & \text{falls } m = l = j, \\ 0, & \text{falls } m \ne l. \end{cases}$$

Im Fall $j = k > 1$ ist die Rotationsmatrix mit den Eintägen

$$a_{l,m} := \begin{cases} 1, & \text{falls } (m,l) \in \{(1,j),(j,1)\}, \\ 0, & \text{falls } (m,l) \in \{(1,1),(j,j)\}, \\ \delta_{l,m}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

hilfreich.

Aufgabe 39 (K):
Zeigen Sie jeweils die Integrabilität der Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ und berechnen Sie $\int_D f(x,y,z)\, d(x,y,z)$ in folgenden Fällen:

(i) $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,\infty),\ 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 8\}$ und $f(x,y,z) := 4x(z^2 + y^2)$.

(ii) $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,1],\ x^2 + y^2 \le (1-z)^2\}$ und $f(x,y,z) := (x^2+y^2)^2 \mathrm{e}^{(1-z)^7}$.

(iii) Es seien $h > 0$, $0 < r < R$, $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le h,\ r^2 \le y^2 + z^2 \le R^2\}$ ein Hohlzylinder und $f(x,y,z) := \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Aufgabe 40:
Es sei $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (s,t) \mapsto (s(1-t), st)$.

(i) Zeigen Sie, dass $\Phi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ gilt.

(ii) Beweisen Sie $\Phi([0,1]^2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$.

(iii) Zeigen Sie, dass Φ auf $(0,1)^2$ injektiv ist.

(iv) Zeigen Sie, dass $\det \Phi'(s,t) \neq 0$ für alle $(s,t) \in (0,1)^2$ gilt.

(v) Es seien $a, b > 0$ und $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ messbar, $B(x,y) := \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1}\, dt,\ x, y > 0$ die Beta-Funktion. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\int_{\Phi([0,1]^2)} x^{a-1} y^{b-1} f(x+y)\, d(x,y) = B(a,b) \int_0^1 s^{a+b-1} f(s)\, ds$$

gilt, sobald mindestens eines der beiden Integrale existiert.

Anmeldung zur Klausur Analysis III

Die Klausur Analysis III findet statt am **27.03.2019** in der Zeit von **11-13 Uhr**.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort freigeschaltet. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **10.03.2019**.